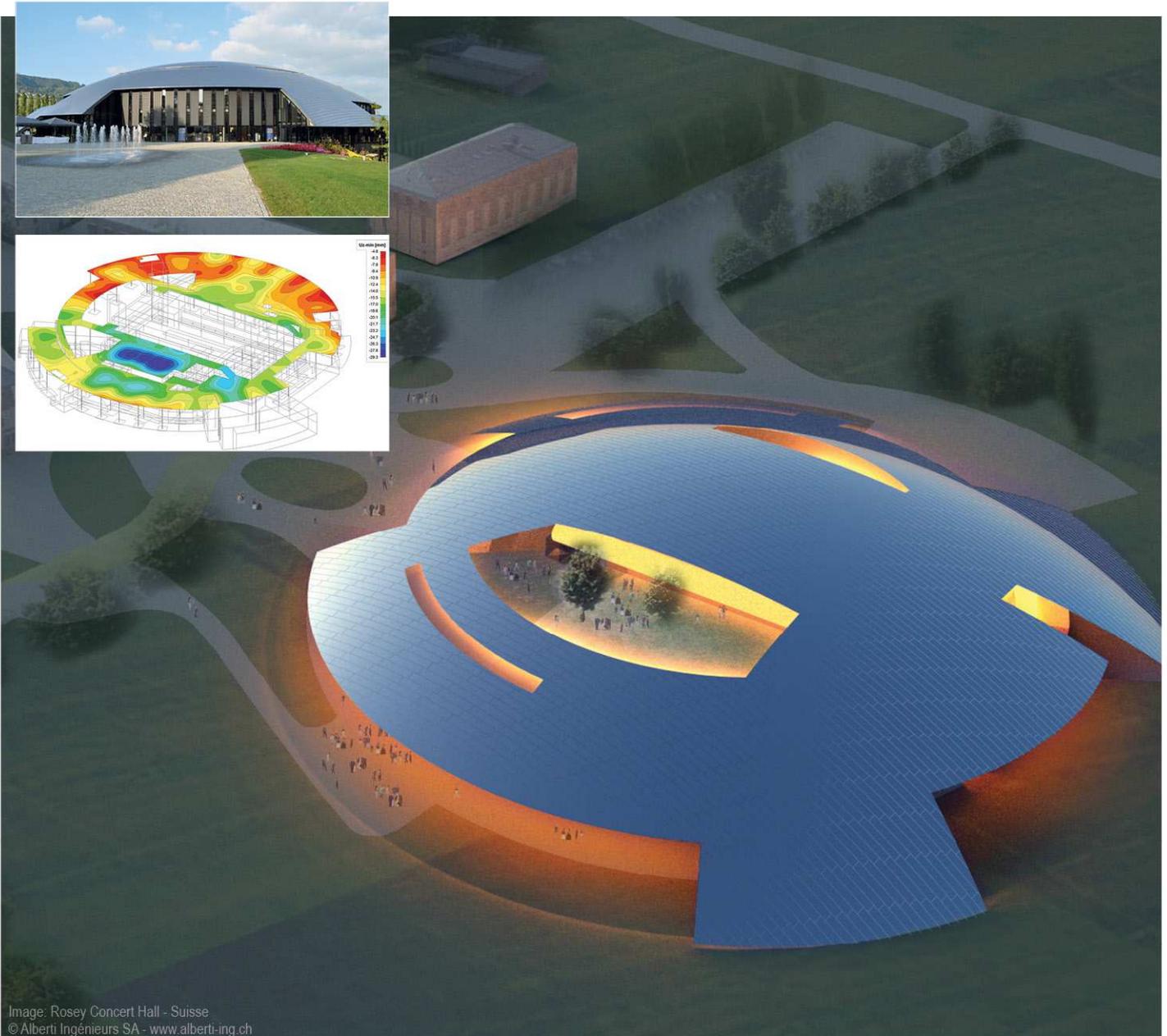


# SCIENGINEER



## Advanced Professional Training Dynamics

All information in this document is subject to modification without prior notice. No part of this manual may be reproduced, stored in a database or retrieval system or published, in any form or in any way, electronically, mechanically, by print, photo print, microfilm or any other means without prior written permission from the publisher. SCIA is not responsible for any direct or indirect damage because of imperfections in the documentation and/or the software.

© Copyright 2015 SCIA nv. All rights reserved.

## Sommaire

<b>1. Introduction.....</b>	<b>5</b>
<b>2. Vibration libre: Fréquences propres .....</b>	<b>6</b>
<b>2.1 Théorie .....</b>	<b>6</b>
<b>2.2 Fréquences propres dans SCIA Engineer .....</b>	<b>8</b>
Exemple 1: Free_Vibration_1.esa.....	10
<b>2.3 Portiques.....</b>	<b>22</b>
Exemple 2: Free_Vibration_2.esa.....	22
Exemple 3: Free_Vibration_3.esa.....	30
<b>2.4 Dalles.....</b>	<b>38</b>
Exemple 4: Free_Vibration_4.esa.....	38
<b>3. Vibration forcée : Charge harmonique.....</b>	<b>44</b>
<b>3.1 Théorie .....</b>	<b>44</b>
<b>3.2 Charge harmonique dans SCIA Engineer.....</b>	<b>46</b>
Exemple 5: Forced_Vibration_1.esa.....	48
Résonance .....	57
Exemple 6: Forced_Vibration_2.esa.....	60
<b>4. Analyse Spectrale : Charge Sismique.....</b>	<b>68</b>
<b>4.1 Théorie .....</b>	<b>68</b>
<b>4.2 Charge sismique dans SCIA Engineer.....</b>	<b>71</b>
Exemple 7: Spectral_Analysis_1 .....	75
Exemple 8: Spectral_Analysis_2.esa.....	78
Exemple 9: Spectral_Analysis_3.esa.....	94
<b>4.3 Combinaisons Sismiques .....</b>	<b>97</b>
SeismCombi_together.esa.....	97
<b>4.4 Masse dans l'analyse.....</b>	<b>102</b>
Exemple 10: Spectral_Analysis_participation mass only.esa.....	102
Exemple 11: Spectral_Analysis_missing mass .esa.....	110
Exemple 12: Spectral_Analysis_Residual mode .esa.....	116
<b>4.5 Superposition modale.....</b>	<b>124</b>
<b>5. L'amortissement.....</b>	<b>128</b>
<b>5.1 Théorie .....</b>	<b>128</b>
<b>5.2 L'amortissement dans SCIA Engineer .....</b>	<b>130</b>
Exemple 10: Damping_1.esa.....	133
Exemple 11: Damping_2.esa.....	141
Exemple 12: Damping_3.esa.....	143
Exemple 13: Damping_4.esa.....	146
<b>6. Reduced Analysis Model.....</b>	<b>157</b>
<b>6.1 Théorie .....</b>	<b>157</b>
<b>6.2 La méthode IRS dans SCIA Engineer.....</b>	<b>159</b>
Exemple 14: IRS.esa .....	164
<b>6.3 Excentricité accidentelle (Torsion accidentelle).....</b>	<b>175</b>
Exemple 15: Accidental_torsion.esa.....	176



## 1. Introduction

Les calculs dynamiques ne sont pas aussi fréquents dans le Génie Civil que les calculs statiques. Cependant, ils sont inévitables pour certains projets : les effets du vent sur les structures de grande hauteur, les vibrations transversales des tours et des cheminées, les structures situées dans des régions sismiques, ...

SCIA Engineer comprend des modules spécialisés qui traitent des questions liées à la dynamique. Dans ce cours, les différents aspects de ces modules sont présentés de façon détaillée.

Dans un premier temps, le fondement des calculs dynamiques est exposé, c'est à dire le calcul des fréquences propres. Les fréquences propres constituent la base de calcul pour tous les types d'analyse dynamique.

Dans le troisième chapitre, le calcul de fréquences propres est complété avec le calcul de charges harmoniques : l'effet des vibrations dues aux machines par exemple, peut être calculé en utilisant ce principe.

Deux chapitres sont consacrés au calcul sismique et à l'influence de l'amortissement sur l'action sismique. Le dernier chapitre du cours traite des principes liés aux tourbillons, utilisés par exemple pour calculer les cheminées.

Tous les chapitres sont illustrés par des exemples. Des exemples relativement faciles ont été choisis volontairement pour que les principes de calculs soient clairs. À cette fin, presque tous les calculs ont été vérifiés par des calculs manuels pour donner un bon aperçu de l'application de la théorie dans SCIA Engineer.

Quand ces principes auront été bien compris, ils pourront être appliqués sans difficultés à des structures plus complexes.

## 2. Vibration libre: Fréquences propres

Dans ce chapitre, le calcul des fréquences propres dans SCIA Engineer est expliqué en détail.

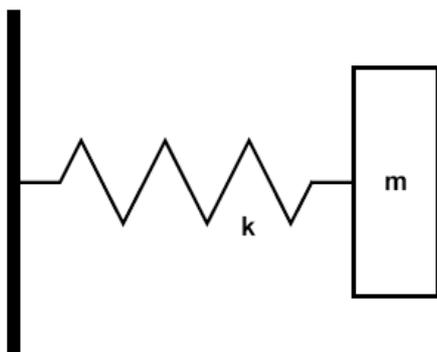
Les fréquences propres peuvent être nécessaires pour vérifier les critères de confort pour les bâtiments, pour analyser la résonance induite par le vent pour les ponts, pour vérifier les exigences pour les équipements sensibles, ...

Tout d'abord, la théorie derrière le calcul est expliquée et illustrée par un exemple. La procédure est ensuite appliquée aux portiques et aux dalles. Les résultats de tous les exemples sont comparés aux calculs manuels pour fournir une compréhension claire des principes appliqués.

### 2.1 Théorie

Pour comprendre ce qui se passe lors de l'analyse dynamique d'une structure complexe avec des portiques ou des éléments finis, la vibration libre d'un système à un seul degré de liberté est considérée en détail. Une analyse complète peut être trouvée dans la référence [1].

Considérons le système suivant :



Un corps de masse **m** est libre de se déplacer dans une direction. Un ressort de raideur constante **k**, encastré à une extrémité, est attaché à l'autre extrémité de la masse. L'équation de mouvement peut être écrite comme suit :

$$m \cdot \ddot{y}(t) + k \cdot y(t) = 0 \quad (2.1)$$

Une solution de cette équation différentielle est :  $y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$

En remplaçant dans (2.1) on obtient :

$$(-m \cdot \omega^2 + k) \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t) = 0 \quad (2.2)$$

Cela implique que :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.3)$$

Où  $\omega$  est appelée la fréquence circulaire naturelle.

La période naturelle **T** peut être écrite :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.4)$$

La fréquence naturelle (ou fréquence propre) **f** peut être écrite :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.5)$$

Pour une structure à degrés de libertés multiples, l'équation (2.1) peut être écrite en notation matricielle:

$$M \cdot \ddot{U} + K \cdot U = 0 \quad (2.6)$$

Où :

**U** est le vecteur des translations et rotations dans les nœuds,  
 $\ddot{U}$  est le vecteur des accélérations correspondantes,  
**K** est la matrice de rigidité assemblée pour le calcul statique,  
**M** est la matrice de masse assemblée au cours du calcul dynamique.

De cette équation, il est clair que le modèle de calcul créé pour une analyse statique doit être complété avec des données supplémentaires : les masses.

Les solutions de (2.6) sont des fonctions harmoniques dans le temps. Une solution possible peut s'écrire sous la forme suivante:

$$U = \Phi \cdot \sin(\omega \cdot (T - T_0)) \quad (2.7)$$

Notez que dans cette solution une séparation des variables est obtenue :

- La première partie, ( $\Phi$ ), est une fonction des coordonnées spatiales,
- La deuxième partie,  $\sin(\omega \cdot (T - T_0))$ , est une fonction du temps.

En remplaçant (2.7) dans (2.6), on obtient une nouvelle équation qui est connue sous le nom d'**Equation aux valeurs propres généralisée** :

$$K \cdot \Phi - \omega^2 \cdot M \cdot \Phi = 0 \quad (2.8)$$

La solution de (2.8) donne autant de modes propres qu'il y a d'équations.

Chaque mode propre se compose de 2 parties :

- Une valeur propre : valeur de  $\omega_i$
- Un vecteur propre : vecteur  $\Phi_i$ , qui est complètement déterminé. La forme de la déformée est connue, mais le facteur d'échelle est inconnu. Ce facteur d'échelle peut être choisi de différentes manières. Cela sera expliqué dans le paragraphe suivant.

Un aperçu de l'approche (matrice) mathématique derrière le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres peut être trouvé dans la référence [25].

## 2.2 Fréquences propres dans SCIA Engineer

Dans SCIA Engineer, comme facteur d'échelle, une **M-orthonormalisation** a été mise en œuvre. C'est ce que montre la relation suivante :

$$\Phi_i^T \cdot M \cdot \Phi_i = 1 \quad (2.9)$$

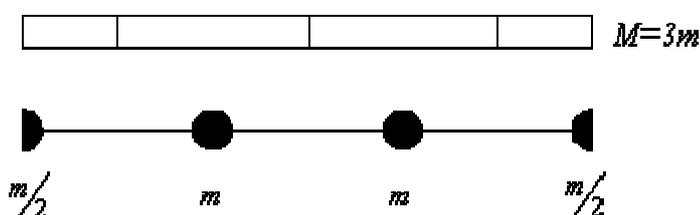
Quelques unes des propriétés de M-orthonormalisation sont :

$$\Phi_j^T \cdot M \cdot \Phi_i = 0, \text{ quand } i \neq j \quad (2.10)$$

$$\Phi_i^T \cdot K \cdot \Phi_i = \omega_i^2 \quad (2.11)$$

La matrice-M peut être calculée de différentes manières. SCIA Engineer utilise la représentation dite de masse localisée. La matrice de masse localisée offre des avantages considérables par rapport à l'utilisation de la mémoire et de l'effort de calcul, car dans ce cas, la matrice-M est une matrice diagonale.

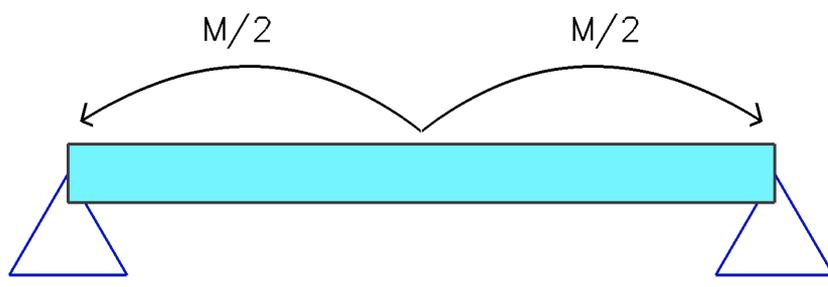
Les masses sont ainsi guidées vers les nœuds du maillage des Eléments Finis. Ce principe est illustré sur la figure suivante [28] :



Le calcul des modes propres et des fréquences propres est donc fait sur un modèle discrétisé d'éléments finis. Cela signifie qu'au lieu d'une structure générale avec un nombre infini de degrés de liberté, un modèle de calcul avec un nombre fini de degrés de liberté est analysé.

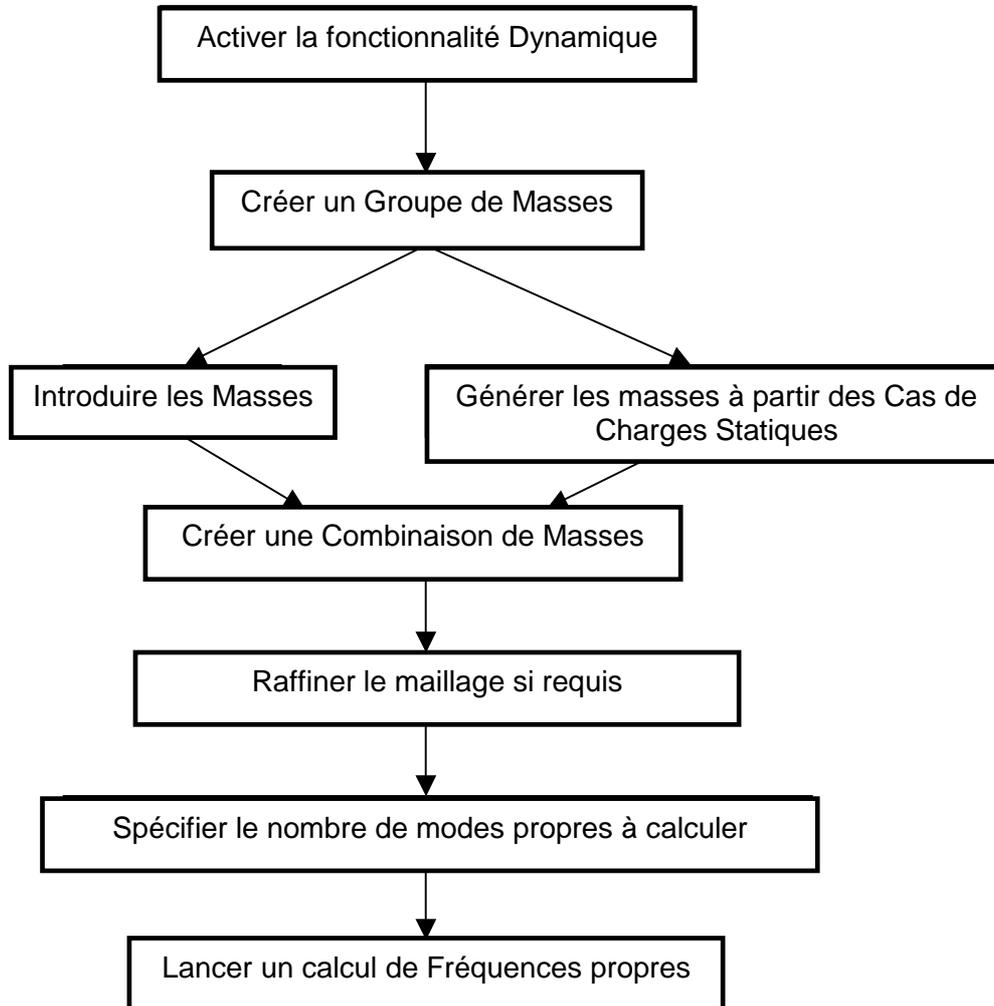
Le nombre de degrés de liberté peut généralement être déterminé par une simple multiplication : le nombre de nœuds du maillage est multiplié par le nombre de déplacements possibles dans le nœud. Il est important de savoir que la précision du modèle est proportionnelle à la «précision de discrétisation», c'est à dire le nombre d'éléments du maillage. Ce raffinement n'a presque pas de signification pratique dans le cas du calcul statique. Toutefois, pour les analyses dynamiques et non linéaires, il affecte de manière significative la précision des résultats.

Prenons l'exemple suivant : une poutre sur deux appuis est soumise à son poids propre. Par défaut (pour un calcul statique) il n'y a qu'un seul élément fini pour la poutre. Prenant en compte ce qui précède, la masse M de la poutre sera guidée vers les deux nœuds d'extrémité puisqu'elles correspondent aux nœuds du maillage.



Dans ce cas, cela signifie que la masse entière sera située au niveau des appuis donc aucune masse ne peut vibrer et le calcul dynamique ne peut pas être exécuté. Comme indiqué, le raffinement du maillage est nécessaire ici pour obtenir des résultats.

Le schéma suivant montre les étapes à suivre pour effectuer un calcul de vibration libre :



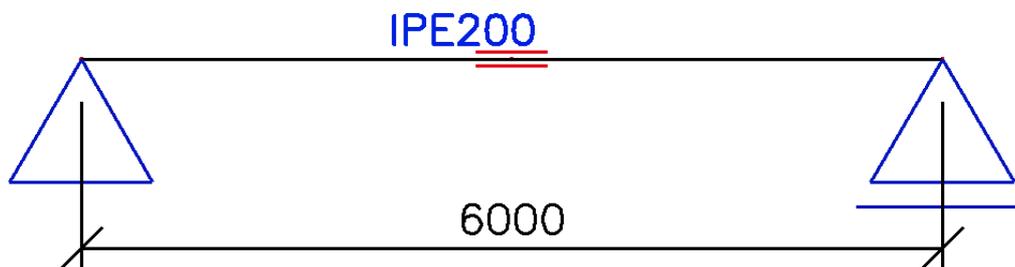
L'analogie entre un calcul statique et dynamique est claire : dans un calcul statique, les **Charges** sont regroupées dans les **Cas de charges** et les cas de charge sont utilisés pour les **Combinaisons**.

Dans un calcul dynamique les **Masses** sont regroupées dans les **Groupes de Masses** et les groupes de masses sont utilisés pour faire des **Combinaisons de masses**.

Ce schéma est illustré dans l'exemple suivant.

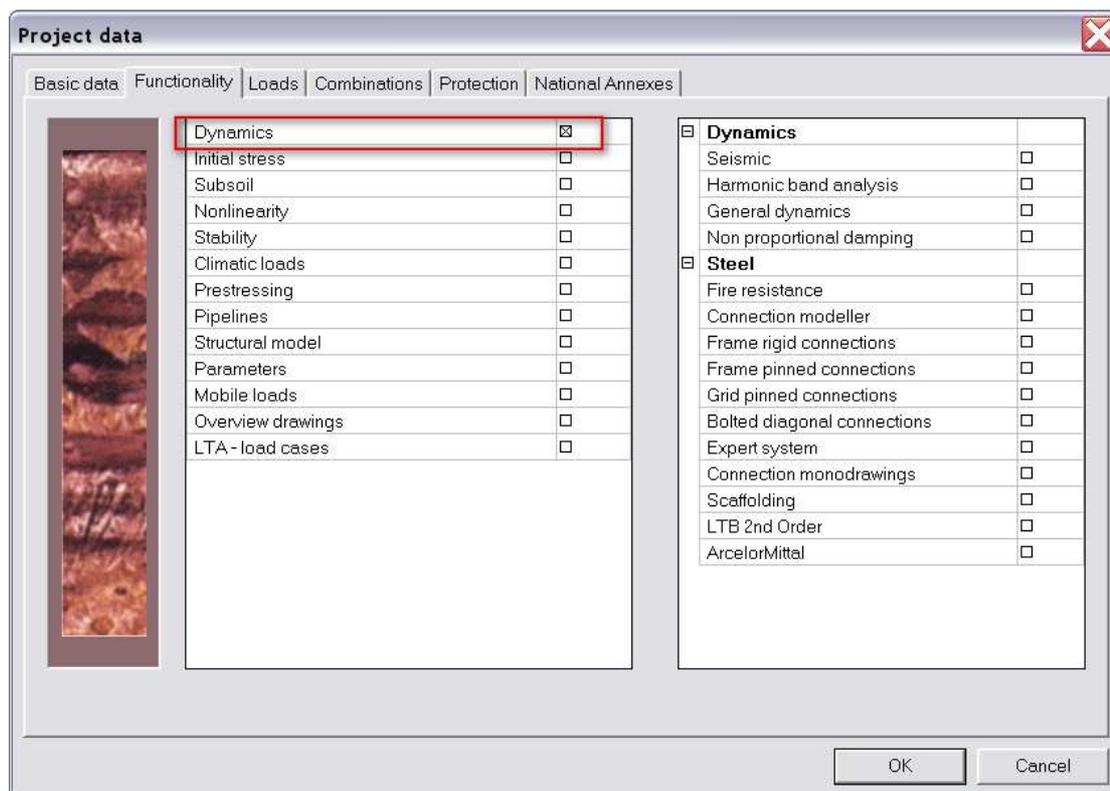
### Exemple 1: Free\_Vibration\_1.esa

Dans cet exemple, une poutre de **6m** sur deux appuis est modélisée. La poutre est en **S235** selon l'**EC-EN**. Il s'agit d'une section de type **IPE 200**. Un nœud a été ajouté au milieu de la poutre, ce qui permettra de définir une masse nodale à cet endroit.

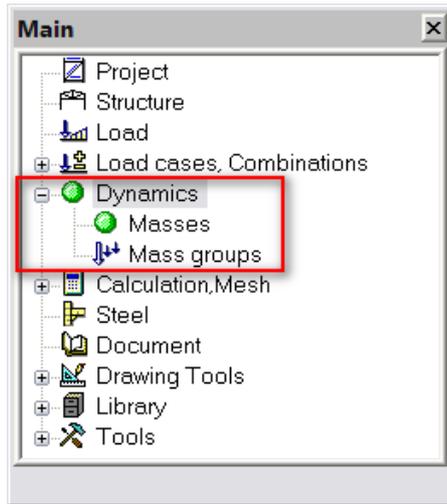


Dans cet exemple, un cas de charge statique est créé : le **poids propre** de la poutre.

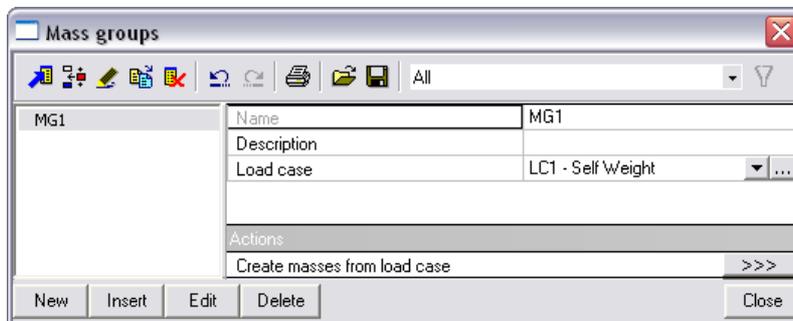
**Étape 1** : La première étape dans le calcul dynamique consiste à activer la **Fonctionnalité Dynamique** à partir de l'onglet fonctionnalités qui se trouve dans les **Paramètres du Projet**.



Lorsque cela est fait, un nouveau groupe apparaît dans le menu **Principal** :



Étape 2 : La deuxième étape consiste à créer un **Groupe de Masses**.



Comme indiqué dans le schéma, un Groupe de Masses est utilisée pour grouper des masses de la même façon qu'un Cas de Charge est utilisé pour grouper des charges. Quand un Groupe de Masses est défini, les masses peuvent être créées. SCIA Engineer permet également à l'utilisateur de créer des masses à partir d'un cas de charge statique. Lorsque par exemple le poids du toit est introduit en tant que charge linéaire, l'action **Créer des masses à partir d'un cas de charge** va générer automatiquement des masses à partir de ces charges linéaires. Il est clair que ceci permet de saisir rapidement les données nécessaires.

**Remarques :**

---

- Le poids propre d'une structure est toujours pris en compte automatiquement pour le calcul dynamique. La masse du poids propre n'est pas affichée.

- Lorsque vous spécifiez un cas de charge, mais n'utilisez pas le bouton «Créer des masses à partir d'un cas de charge" rien ne va se passer : aucune masse ne sera créée.

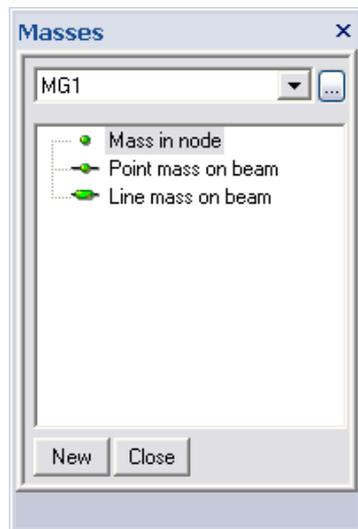
- Lorsque les masses sont créées à partir des charges, SCIA Engineer va utiliser l'accélération de gravité spécifiée dans l'onglet **Charges** qui se trouve dans les paramètres du projet. Par défaut cette valeur est **9,81 m / s<sup>2</sup>**

- La masse reste inchangée après toute modification ou suppression de la force d'origine. Si la masse est censée correspondre à la nouvelle force, il est nécessaire de supprimer la masse et de la créer encore une fois.

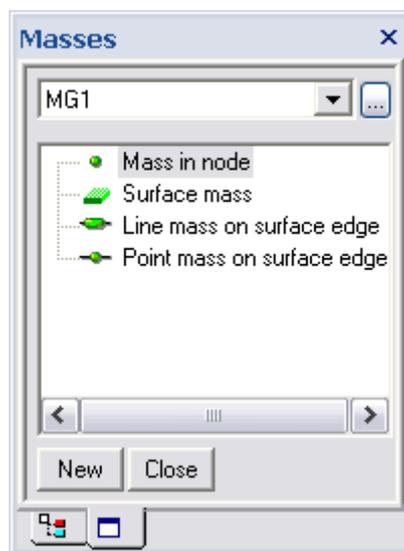
---

- La masse est générée uniquement à partir des composantes verticales d'une force.

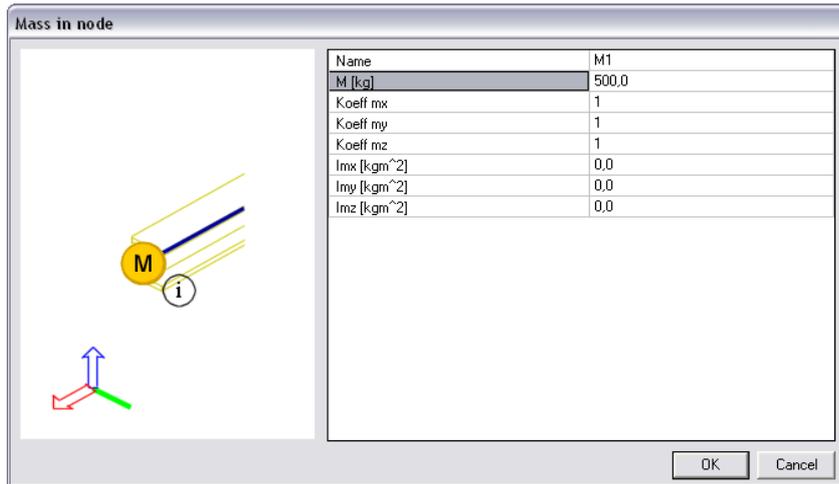
Etape 3: Lorsque les groupes de masses sont créés, des **Masses** peuvent être saisies. SCIA Engineer permet de définir des masses nodales, des masses concentrées sur barre, des masses réparties sur barre.



Pour les éléments 2D, les options suivantes sont disponibles :



Dans cet exemple, une masse de **500 kg** va être introduite au nœud situé au milieu de la poutre en utilisant la fonction **Masse au nœud**.

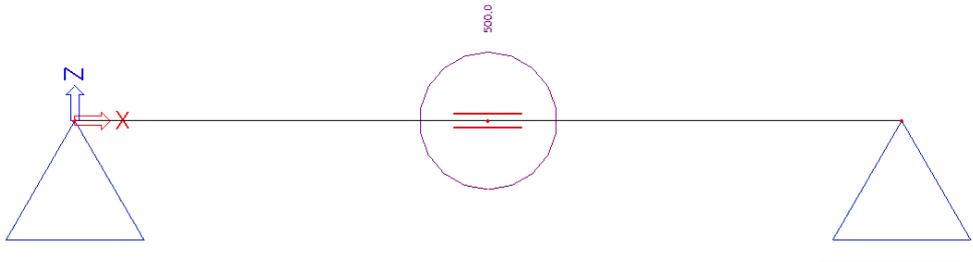


Les paramètres **Coeff mx**, **Coeff my** et **Coeff mz** spécifient la quantité de masse qui participe à la vibration selon le repère global X, Y ou Z.

Ceci peut être utilisé lors du calcul d'une cheminée par exemple : quand le **Coeff mx** a la valeur 1 et les **Coeff my et mz** sont pris égal à 0, alors la masse ne peut vibrer que dans la direction globale X. Seuls les modes propres dans cette direction seront donc obtenus.

**Imx**, **Imy** et **Imz** spécifient le moment d'inertie autour des axes globaux X, Y ou Z. Par défaut une masse nodale est concentrée, elle n'a donc aucune inertie. Lorsque la masse représente une grosse machine, il est possible de saisir le moment d'inertie de cette machine.

La masse nodale de **500 kg** est introduite au nœud situé au milieu de la poutre :

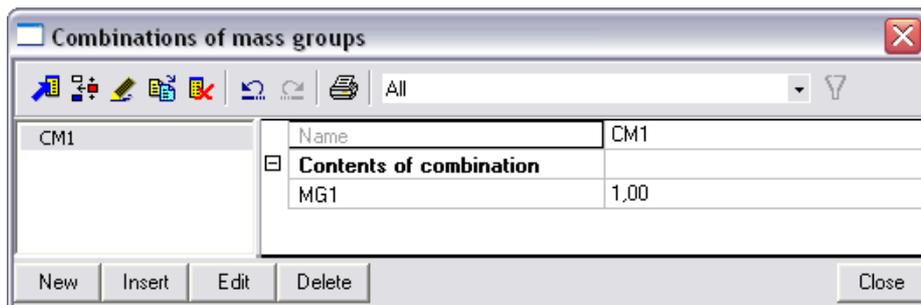


**Remarques :**

- Pour afficher les masses et les étiquettes de masse, allez dans **Définir les Paramètres d'affichage pour tout le modèle >Charges / Masses**.

- Les masses représentent des **Données Additionnelles** qui peuvent être déplacées / copiées à d'autres entités.

**Etape 4:** Ensuite, les Groupes de masses peuvent être combinés dans une **Combinaison de Groupes de masses**.



La Combinaison de Groupes de Masses fonctionne de la même manière qu'une Combinaison de Charges.

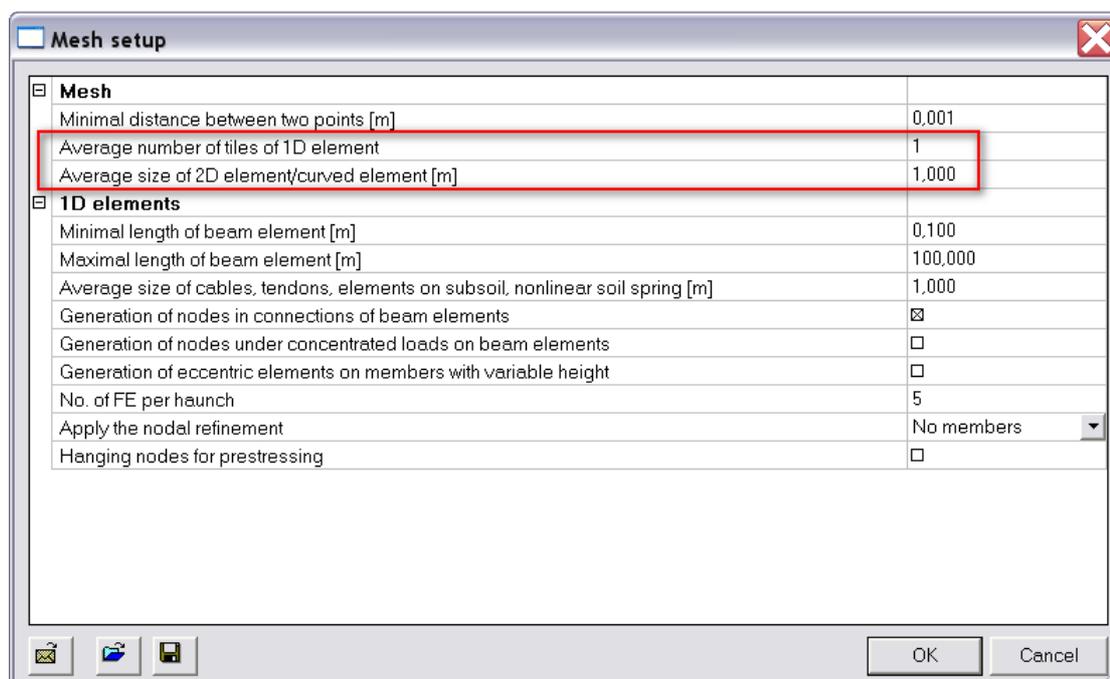
Un coefficient multiplicateur peut être saisi pour chaque Groupe de Masses. Ceci peut être utilisé lorsque la masse d'une structure change au cours de sa durée de vie.

Considérons par exemple un réservoir d'eau. Une Combinaison de Groupes de Masses peut être créée avec un coefficient de 1,00 pour spécifier un réservoir plein et une autre Combinaison de Groupes de Masses peut être créée avec un coefficient de 0,50 pour spécifier un réservoir à moitié plein. De cette façon, les deux situations peuvent être calculées en même temps.

Comme indiqué dans l'étape 2 : le poids propre est automatiquement pris en compte pour chaque Combinaison de Groupes de Masses.

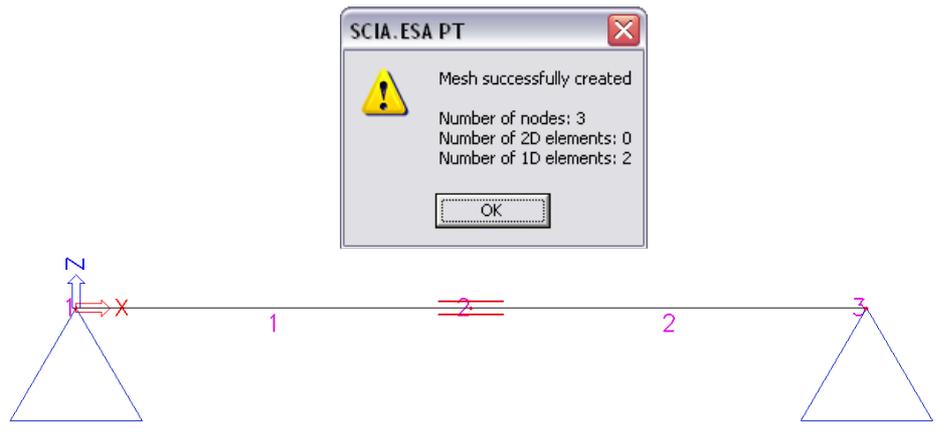
*Etape 5:* Après avoir exécuté les étapes précédentes, le calcul peut déjà être lancé. Cependant, comme indiqué au paragraphe 2.2 il peut être nécessaire d'affiner le maillage.

Cela peut être fait à partir de **Calcul, Maillage > Configuration du Maillage**.

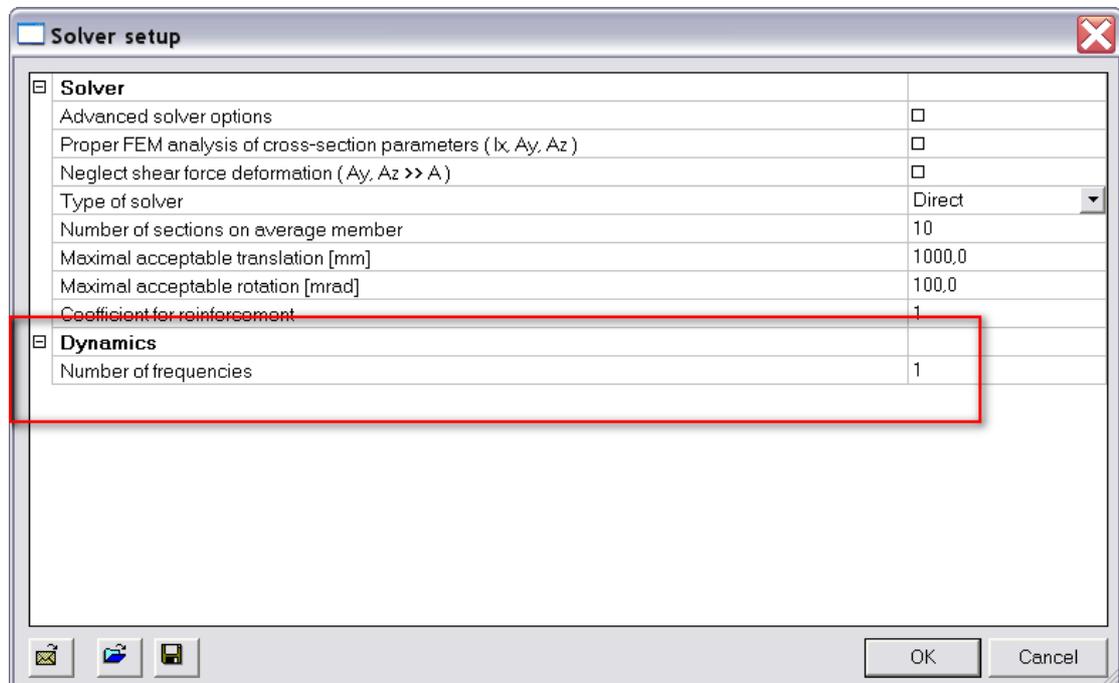


Pour les éléments 1D (poutres) le **Nombre moyen de divisions des éléments 1D** peut être augmenté. En général, 5 à 10 éléments sont suffisants pour un calcul dynamique. Lorsque vous spécifiez un nombre trop élevé, le calcul prendra beaucoup de temps. Pour les éléments 2D (plaques et coques) la **Taille moyenne des éléments 2D** doit être modifiée.

Dans cet exemple, en raison de l'insertion du point milieu, il y a déjà un nœud de maillage à cet endroit. Il n'est donc pas nécessaire d'avoir un maillage plus dense. Ceci peut être vérifié après la génération du maillage :



**Etape 6:** Une autre étape importante avant de lancer le calcul est de préciser le nombre de modes propres qui doivent être calculés. Cela peut être fait à travers **Calcul, Maillage > Solveur**.

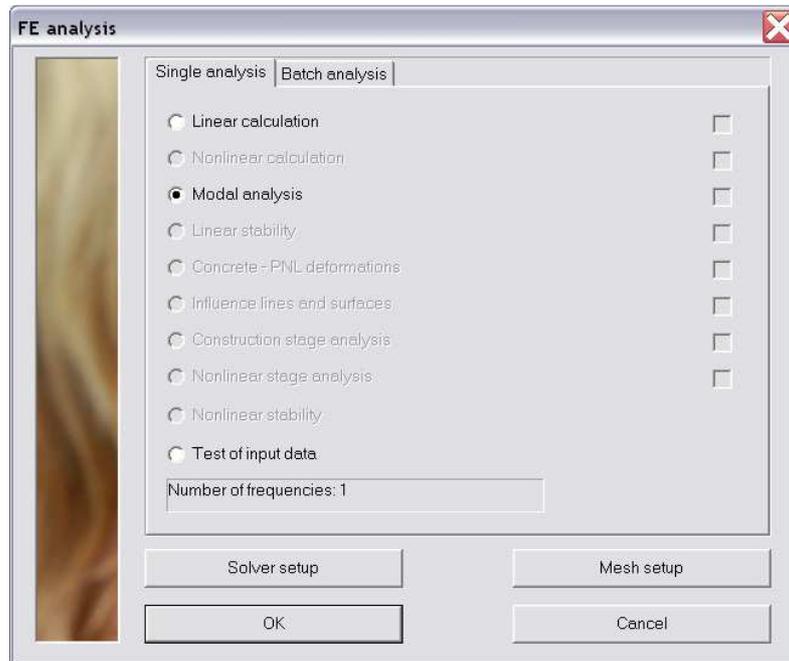


Comme expliqué ci-dessus, le nombre de fréquences propres dépend du nombre de degrés de liberté de la structure qui dépend à leur tour de la discrétisation. Dans cet exemple, seul le nœud de maillage situé au milieu de la poutre peut vibrer à la verticale. Par conséquent un seul mode propre doit être calculé. Le **Nombre de Fréquences** peut ainsi être réduit à 1.

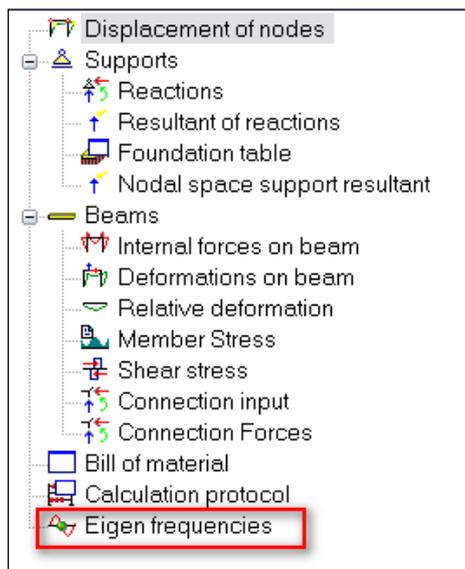
**Remarque :**

*Lorsque le nombre de fréquences est supérieur au nombre de degrés de liberté, un message apparaît lors du calcul et indique que le calcul ne peut être exécuté. La solution est soit de diminuer le nombre de fréquences calculées ou de raffiner le maillage pour créer plus de degrés de liberté.*

**Etape 7:** La dernière étape est d'effectuer le calcul de **Fréquences Propres** à partir de **Calcul, Maillage > Calcul**.



Après avoir fait le calcul, le menu Résultats affiche l'option **Fréquences Propres** :

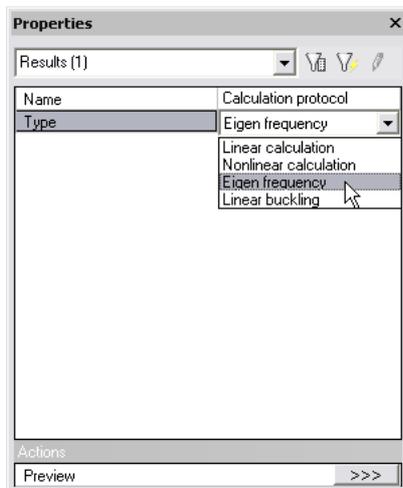


L'aperçu contient le résultat suivant :

**Eigen frequencies**

N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
<b>Mass combination : CM1</b>				
1	6,31	39,67	1573,65	0,16

D'après ce calcul, la fréquence propre du premier mode a une valeur de **6,31 Hz**. Pour avoir des résultats plus détaillés, il est possible d'ouvrir le **Protocole de Calcul** pour le calcul de **Fréquences Propres** :



Sum of masses			
	X	Y	Z
Combinaison of mass groups 1	600.68	0.00	567.12

Modal participation factors							
Number	Omega	Period	Freq. [Hz]	Damp ratio	Wxi / Wxtot	Wyi / Wytot	Wzi / Wztot
1	39.6705	0.1584	6.3138	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000
					0.0000	0.0000	1.0000

La somme des masses montre la quantité de masse qui peut vibrer pour cette Combinaison de Groupes de Masses. Dans cet exemple, ceci est régi par la masse de 500 kg et la masse de la poutre.

Ces valeurs peuvent être calculées comme suit :

- La poutre est un IPE 200 avec une section de  $A = 0,00285 \text{ m}^2$
- La longueur de la poutre est de 6m
- La masse volumique du S235 est de  $7850 \text{ kg/m}^3$

=> La masse totale de la poutre =  $0,00285 \text{ m}^2 \times 6 \text{ m} \times 7850 \text{ kg/m}^3 = 134,235 \text{ kg}$

*Direction-X*

$\frac{1}{4}$  de la masse de la poutre va vers les appuis et ne participe pas à la vibration.

⇒ Masse vibrante =  $500 \text{ kg} + \frac{3}{4} \times 134,235 \text{ kg} = \mathbf{600,68 \text{ kg}}$

*Direction-Z*

$\frac{1}{2}$  de la masse de la poutre va vers l'appui droit et ne participe pas à la vibration.

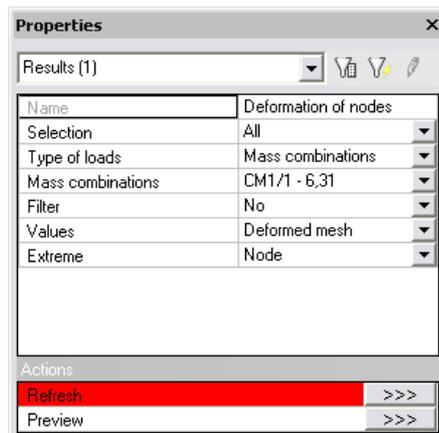
⇒ Masse vibrante =  $500 \text{ kg} + \frac{1}{2} \times 134,235 \text{ kg} = \mathbf{567,12 \text{ kg}}$

Il est clair qu'un maillage plus dense donnera une participation plus précise de la masse de la poutre.

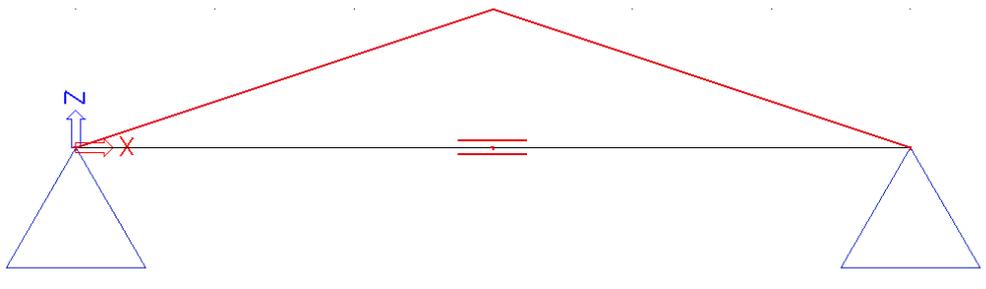
Les **Facteurs de Participation Modale** montrent la quantité de masse qui vibre pour un mode propre spécifique en tant que pourcentage de la masse totale. Dans cet exemple,  $W_{zi}/W_{z\text{tot}}$  est égal à 1, ce qui signifie que 100% de la masse vibre dans le sens vertical pour le premier mode propre.

Ces facteurs seront considérés plus en détail lors des calculs sismiques.

Le mode propre peut être visualisé à travers la **Déformation des Nœuds**.



- Sélection = **Tout**
- Type de charges = **Combinaisons de Masses**
- Pour chaque mode propre, une Combinaison de masses spécifique peut maintenant être choisie.
- Le champ Valeurs est sur **Déformée du Maillage** pour montrer la déformation des nœuds du maillage.



<b>Deformation of nodes</b>				
Eigen solution, Extreme : Node				
Selection : All				
Mass combinations : CM1/1 - 6,31				
Values are multiplied by 10000 for better numeric representation.				
Node of mesh	Case	Ux []	Uz []	Fiy []
1	CM1/1 - 6,31	0,00	0,00	-0,02
2	CM1/1 - 6,31	0,00	0,04	0,00

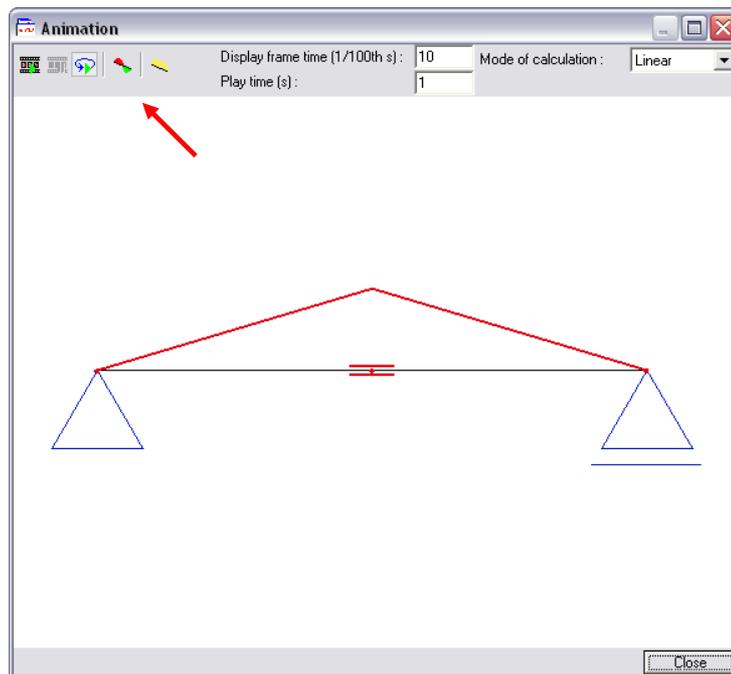
Le résultat est comme prévu, le nœud interne vibre. Un maillage plus dense donnera une bien meilleure représentation du Mode Propre. Il est important de garder à l'esprit

que la vibration se fait dans deux directions : dans ce cas le mode qui est représenté montre un déplacement vers le haut, cependant une demi-période plus tard, le déplacement se fera vers le bas.

La vibration libre ne donne que la conception des propriétés de la structure et permet de prédire son comportement pour des charges variant en fonction du temps. Dans la nature, chaque corps préfère rester statique. Si forcés de se déplacer, il préfère la voie qui nécessite la consommation de la plus petite quantité d'énergie. Ces moyens de déplacement sont les modes propres.

Les modes propres ne représentent pas la déformation réelle de la structure. Ils ne montrent que la déformation qui est «naturelle» pour la structure. C'est pourquoi les déplacements calculés sont des nombres sans dimension. Les résultats fournis sont orthonormés, c'est à dire qu'ils ont une relation particulière avec les masses dans la structure. La valeur absolue des nombres individuels n'est pas importante. Ce qui importe, c'est leur proportion mutuelle.

La vibration de la structure peut être affichée avec **Vue > Animation**.



En activant l'option '**Symétrique**' vous pourrez voir la vibration réelle dans les deux directions.

**Remarque :**

*En utilisant CTRL+Bouton droit de la souris, la structure peut être tournée dans la fenêtre d'Animation.*

## Calcul manuel

In order to check the results of SCIA Engineer, the eigen frequency of this structure is calculated by a manual calculation.

Following reference [1], the circular frequency of a beam on two supports with a mass in the middle can be calculated as follows:

$$\omega^2 = 48 \frac{EI}{ML^3} \quad (2.7)$$

With:

- $\omega$  = Circular frequency
- E = Modulus of Young
- I = Moment of inertia of the beam
- L = Length of the beam
- M = Mass in the middle of the beam

In this Example E = 210.000 N/mm<sup>2</sup>  
 I<sub>y</sub> = 19430000 mm<sup>4</sup>  
 L = 6000 mm  
 M = 500 kg

$$\Rightarrow \omega^2 = 48 \frac{210.000 \text{ N/mm}^2 \cdot 19430000 \text{ mm}^4}{500 \text{ kg} \cdot (6000 \text{ mm})^3} = 1813,47 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\Rightarrow \omega = 42,58 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \mathbf{6,78 \text{ Hz}}$$

The result calculated by SCIA Engineer was **6,31 Hz**.

The difference in results is caused by two assumptions in the manual calculation:

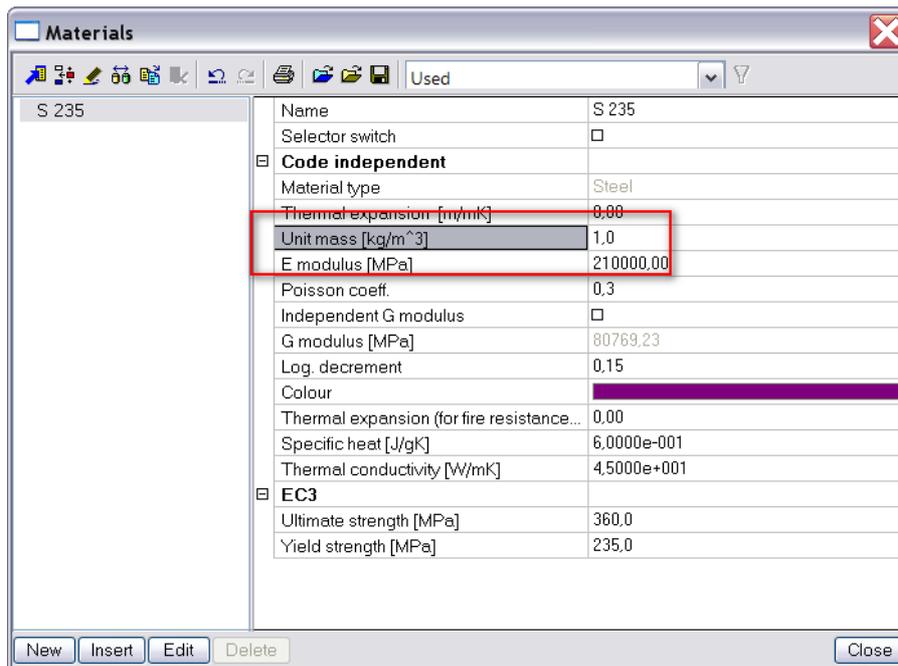
- The manual calculation does not take into account the self-weight of the beam

Since  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  a lower mass will lead to a higher  $\omega$  and a higher **f**.

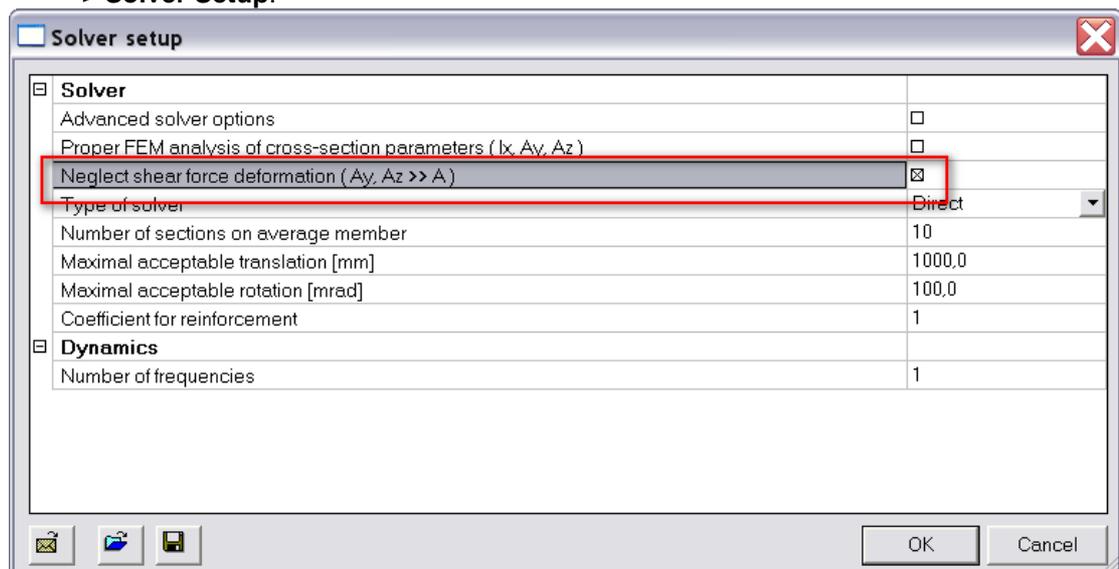
- The manual calculation does not take into account shear deformation  
 A lower deformation leads to a higher stiffness k, a higher  $\omega$  and a higher **f**.

These two assumptions can also be implemented in the calculation model of SCIA Engineer:

- In order not to take the self-weight into account, the volumetric mass of **S235** can be set to **1 kg/m<sup>3</sup>** in the **Material** Library:



- To neglect the shear deformation, activate this option through **Calculation, Mesh > Solver Setup:**



Now when the calculation is performed again, the following results are obtained:

Eigen frequencies				
N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
Mass combination : CM1				
1	6,78	42,58	1813,32	0,15

These results correspond exactly with the manual calculation. This Example clearly shows the importance of checking the assumptions behind the applied theories. When comparing results between two calculations, always make sure the same assumptions/hypotheses are used.

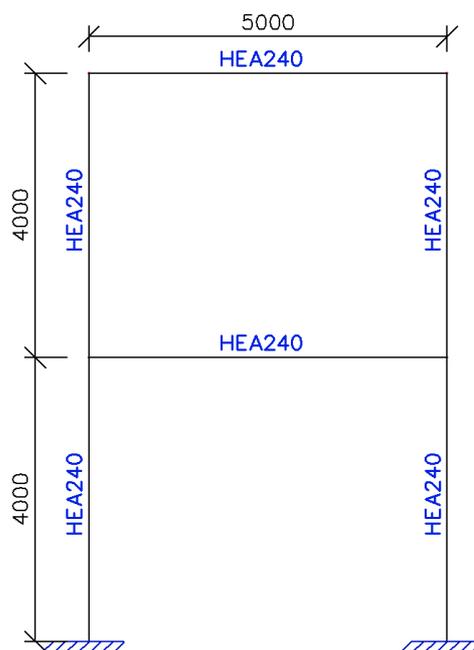
## 2.3 Portiques

Dans ce paragraphe, le calcul de Vibration Libre est illustré pour les portiques. Les principes de la théorie sont appliqués et vérifiés au moyen de calculs manuels.

### Exemple 2: Free\_Vibration\_2.esa

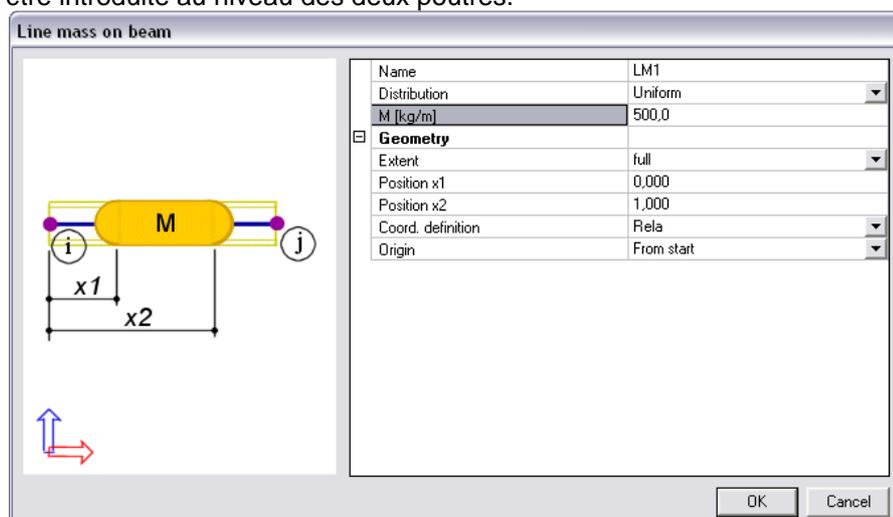
Dans cet exemple, un portique de deux étages est modélisé. Les membres ont une section **HEA 240** et sont fabriqués en **S235** selon l'**EC-EN**. La hauteur de chaque étage est de **4 mètres**, la largeur du cadre est de **5m**. Les appuis en pied de poteaux sont fixes.

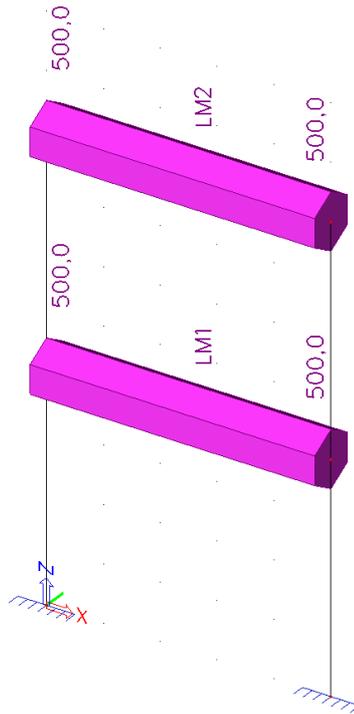
Un cas de charge statique est créé : le **poids propre** du portique. Sur les poutres du plancher et du toit, une masse répartie de **500 kg/m** sera introduite.



**Étapes 1&2 :** L'activation de la fonctionnalité **Dynamique** et la création d'un **Groupe de Masses** sont identiques à l'exemple précédent.

**Étape 3 :** Lorsque le Groupe de Masses a été créé, la masse répartie de **500 kg/m** peut être introduite au niveau des deux poutres.

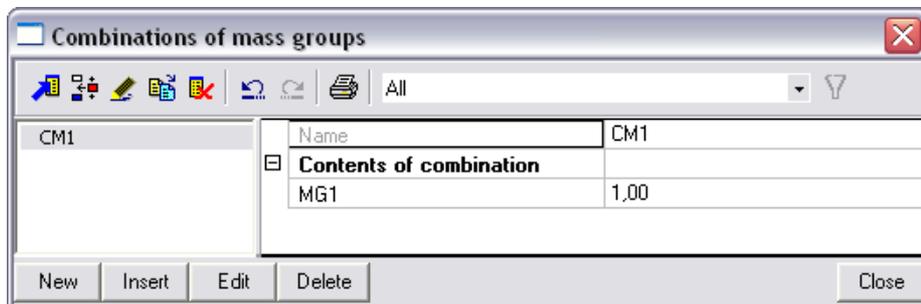




**Remarque :**

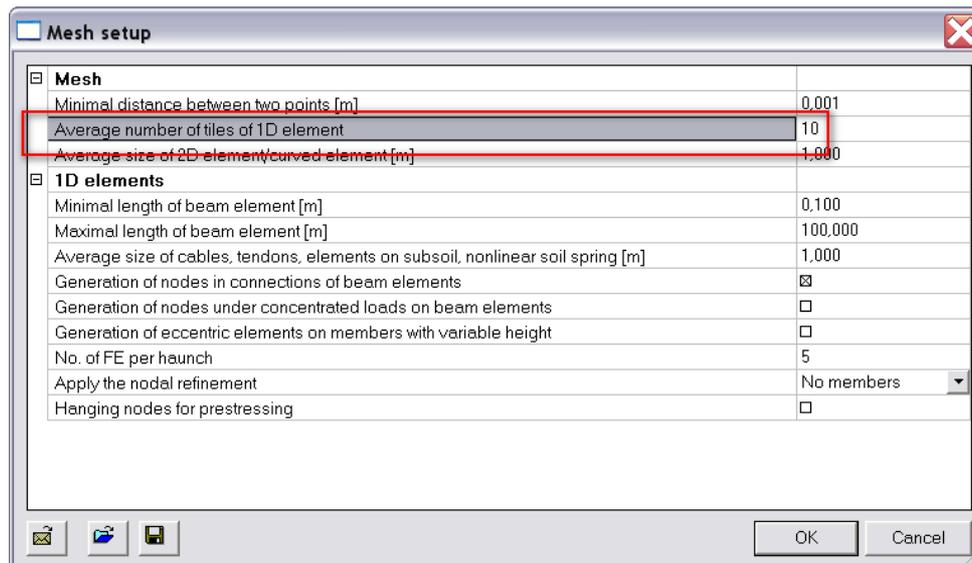
Pour afficher le rendu des masses, allez dans *Paramètres d'affichage Généraux > Divers > Style de dessins pour les données de modèle et les charges*

**Etape 4 :** Ensuite, une **Combinaison de Groupes de Masses** peut être créée.



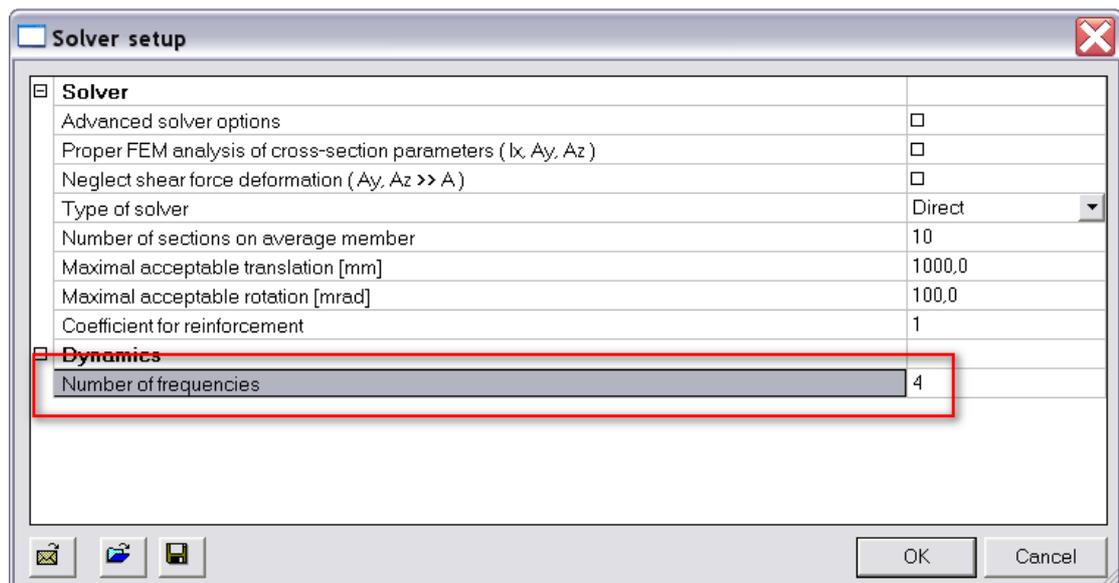
**Etape 5 :** Pour obtenir des résultats précis pour le calcul dynamique, le maillage doit être raffiné.

Ceci peut être réalisé à travers **Calcul, Maillage > Configuration du Maillage**.



Le **Nombre moyen de division des éléments 1D** est pris égal à **10** pour obtenir une bonne distribution des masses réparties et des masses des éléments.

*Etape 6:* La dernière étape avant de lancer le calcul consiste à saisir le nombre de modes propres à calculer. La valeur par défaut dans **Calcul, Maillage > Solveur** est de **4**. Cela est suffisant pour cet exemple.

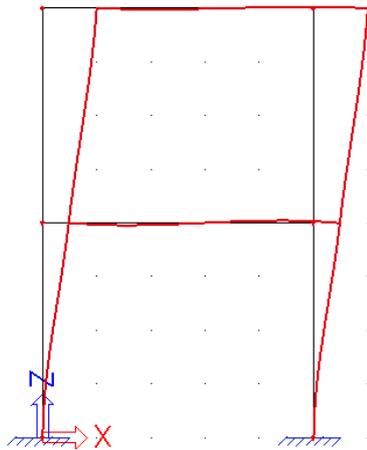


*Etape 7 :* Le calcul de Fréquences Propres peut être exécuté à partir de **Calcul, Maillage > Calcul**.

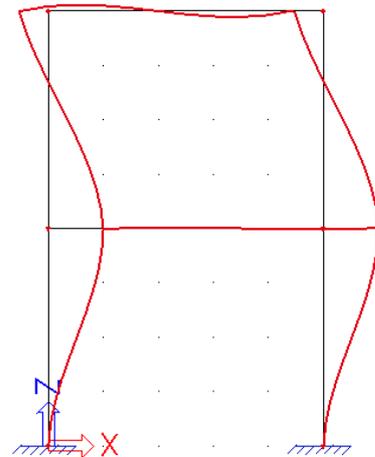
Les résultats suivants sont obtenus :

Eigen frequencies				
N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
Mass combination : CM1				
1	2,89	18,15	329,32	0,35
2	9,52	59,83	3579,23	0,11
3	14,51	91,18	8314,21	0,07
4	16,94	106,45	11332,51	0,06

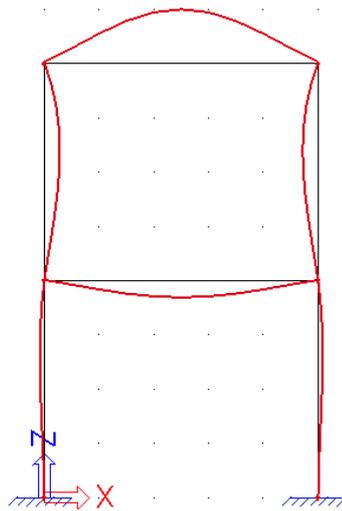
Comme indiqué dans le précédent paragraphe, en utilisant **Déformation aux Nœuds**, la **Déformée du Maillage** peut être affichée pour voir les modes propres :



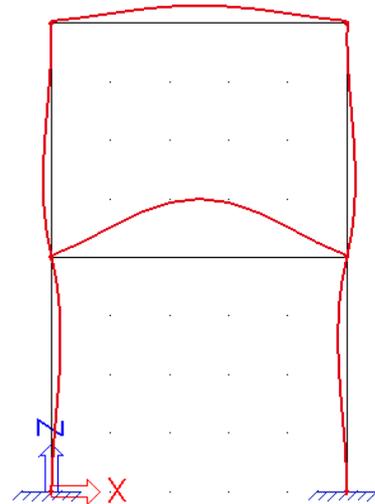
Mode propre 1:  $f = 2,89$  Hz



Mode propre 2:  $f = 9,52$  Hz



Mode propre 3:  $f = 14,51$  Hz



Mode propre 4:  $f = 16,94$  Hz

Le **Protocole de Calcul** pour les **Fréquences Propres** donne les résultats suivants :

Sum of masses			
	X	Y	Z
Combinaison of mass groups 1	6543.37	0.00	6543.37

Modal participation factors							
Number	Omega	Period	Freq. [Hz]	Damp ratio	Wxi / Wxtot	Wyi / Wytot	Wzi / Wztot
1	18.1477	0.3462	2.8883	0.0000	0.8628	0.0000	0.0000
2	59.8284	0.1050	9.5220	0.0000	0.1108	0.0000	0.0000
3	91.1850	0.0689	14.5125	0.0000	0.0000	0.0000	0.1554
4	106.4574	0.0590	16.9432	0.0000	0.0000	0.0000	0.5360
					0.9736	0.0000	0.6914

La somme des masses montre la quantité de masse qui peut vibrer pour cette Combinaison de Groupes de Masses. Dans cet exemple, ceci est régi par la masse répartie de 500 kg/m et la masse des éléments.

Ces valeurs peuvent être calculées comme suit :

- Les éléments sont de type HEA 240 avec une section de  $A = 0,00768 \text{ m}^2$
- La masse volumique du S235 est de  $7850 \text{ kg/m}^3$
- La longueur totale des éléments est  $4 \times 4\text{m} + 2 \times 5\text{m} = 26\text{m}$

Toutefois, comme cela a été précisé dans 2.2, les masses sont guidées vers les nœuds du maillage. Le maillage est constitué de 10 divisions pour chaque membre.

Ceci implique que pour les deux poteaux du bas, la moitié de la masse d'un élément 1D est guidée vers l'appui et ne participe pas à la vibration libre.

- La longueur des poteaux est de 4m
- La longueur d'un élément 1D est de  $4\text{m} / 10 = 0,4\text{m}$
- La longueur de la moitié d'un élément 1D est  $0,4\text{m} / 2 = 0,2\text{m}$ 
  - ⇒ La longueur totale des éléments pris en compte pour la masse est  $26\text{m} - 0,2\text{m} - 0,2\text{m} = 25,6\text{m}$
  - ⇒ Masse totale =  $0,00768 \text{ m}^2 \times 25,6 \text{ m} \times 7850 \text{ kg/m}^3 = 1543,37 \text{ kg}$

Cette masse est ajoutée à la masse répartie de 500 kg/m

- ⇒ Masse vibrante =  $2 \times 500 \text{ kg/m} \times 5\text{m} + 1543,37 \text{ kg} = \mathbf{6543,37 \text{ kg}}$

Les **Facteurs de Participation Modale** montrent la quantité de masse qui vibre pour un mode propre spécifique comme un pourcentage de la masse totale.

Pour le mode propre 1 : 86% de la masse totale vibre dans la direction X

Pour le mode propre 2 : 11% de la masse totale vibre dans la direction X

Pour le mode propre 3 : 16% de la masse totale vibre dans la direction Z

Pour le mode propre 4 : 54% de la masse totale vibre dans la direction Z

La dernière ligne montre le pourcentage total de la masse lorsque ces quatre modes sont combinés : **97%** est prise en compte dans la direction X et **69%** dans la direction Z.

Ces facteurs seront considérés plus en détail lors des calculs sismiques dans le chapitre 4. Pour un calcul sismique, il est nécessaire qu'un nombre suffisant de modes

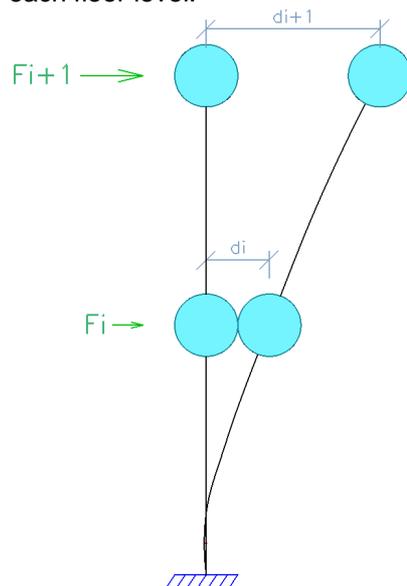
propres soient inclus dans le calcul de sorte qu'au moins 90% de la masse totale soit prise en compte [7].

## Calcul Manuel

In order to check the results of SCIA Engineer, the lowest eigen frequency, or natural frequency of this structure is calculated by a manual calculation.

The method used here is described in the literature as Rayleigh's Energy Method. [1], [13].

In this method, the structure is idealized as a cantilever beam with lumped masses at each floor level:



The structure is then loaded with a set of linearly increasing horizontal loads on each floor level. Due to this loading, the structure will deform and thus the rigidity of the system is known. The eigen frequency of the structure can then be approximately calculated as follows:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot d_i}{\sum_{i=1}^n M_i \cdot d_i^2}} \quad (2.8)$$

With:

$n$  = Number of floors

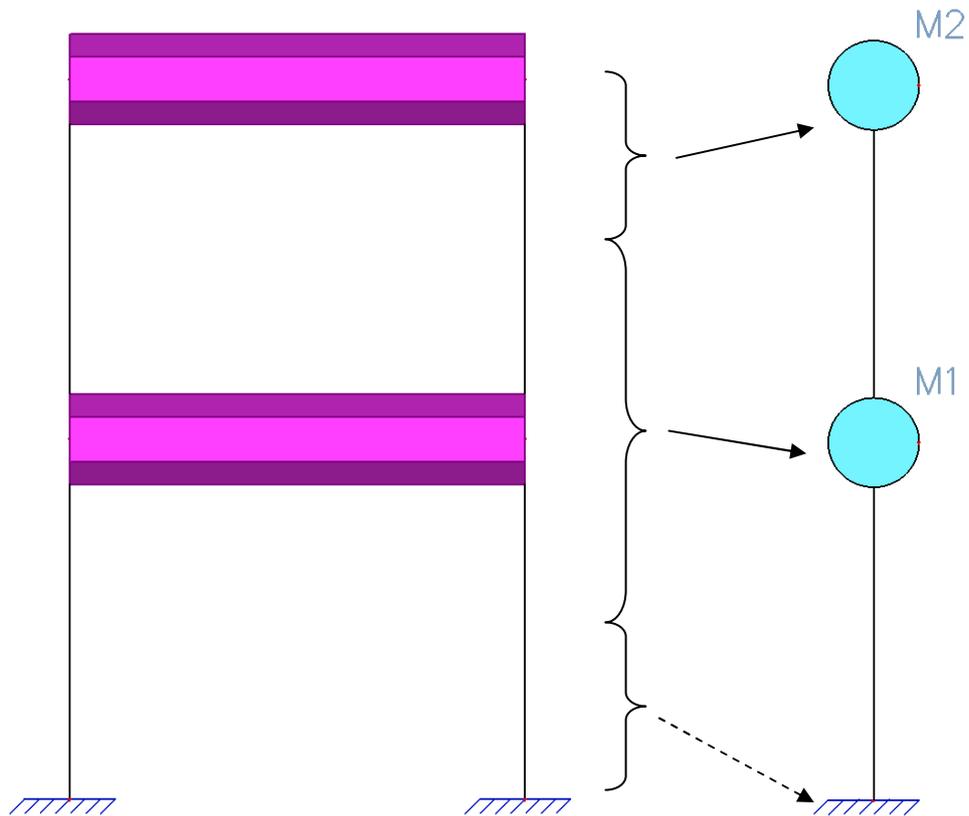
$F_i$  = Horizontal force acting on floor level  $i$

$d_i$  = Horizontal deformation of floor level  $i$

$M_i$  = Idealized mass of floor level  $i$

The analogy between this formula and  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  can clearly be seen.

To use this formula, the frame needs to be idealized to a cantilever:



The mass of the lower part of the structure is idealized to the support of the cantilever so it takes no part in the vibration.

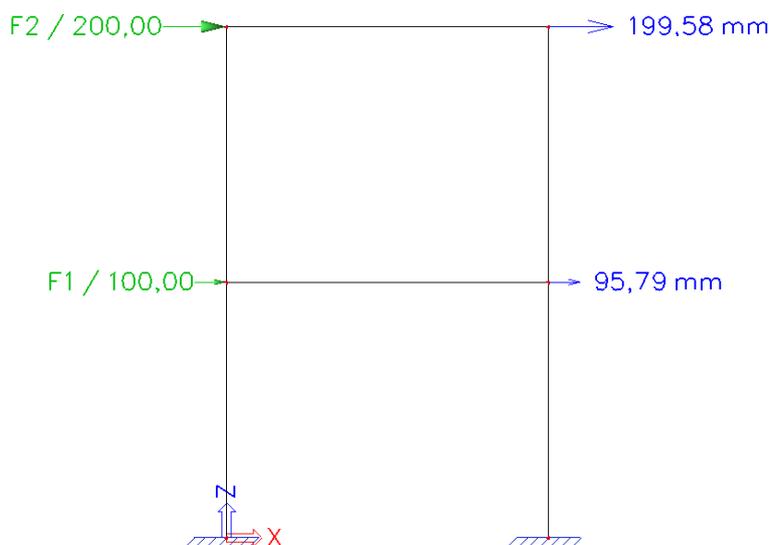
The mass  $M_1$  can be calculated as follows:

$$0,00768 \text{ m}^2 \times (5 + 4 + 4) \text{ m} \times 7850 \text{ kg/m}^3 + 500 \text{ kg/m} \times 5\text{m} = \mathbf{3283,74 \text{ kg}}$$

The mass  $M_2$  can be calculated as follows:

$$0,00768 \text{ m}^2 \times (5 + 4) \text{ m} \times 7850 \text{ kg/m}^3 + 500 \text{ kg/m} \times 5\text{m} = \mathbf{3042,59 \text{ kg}}$$

In order to calculate the horizontal deformations  $d_i$  of each floor level due to a linearly increasing load  $F_i$ , a static load case is calculated with SCIA Engineer consisting of loads of **100 kN** and **200 kN**. The following results are obtained for the nodal deformations:



- ⇒  $F_1 = 100 \text{ kN} = 100000 \text{ N}$
- ⇒  $F_2 = 200 \text{ kN} = 200000 \text{ N}$
- ⇒  $d_1 = 95,79 \text{ mm} = 0,09579 \text{ m}$
- ⇒  $d_2 = 199,58 \text{ mm} = 0,19958 \text{ m}$

Applying formula (2.8):

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{100000N \cdot 0,09579m + 200000N \cdot 0,19958m}{3283,74kg \cdot (0,09579m)^2 + 3042,59kg \cdot (0,19958m)^2}} = \mathbf{2,88 \text{ Hz}}$$

This result corresponds to the **2,89 Hz** calculated by SCIA Engineer.

---

### Exemple 3: Free\_Vibration\_3.esa

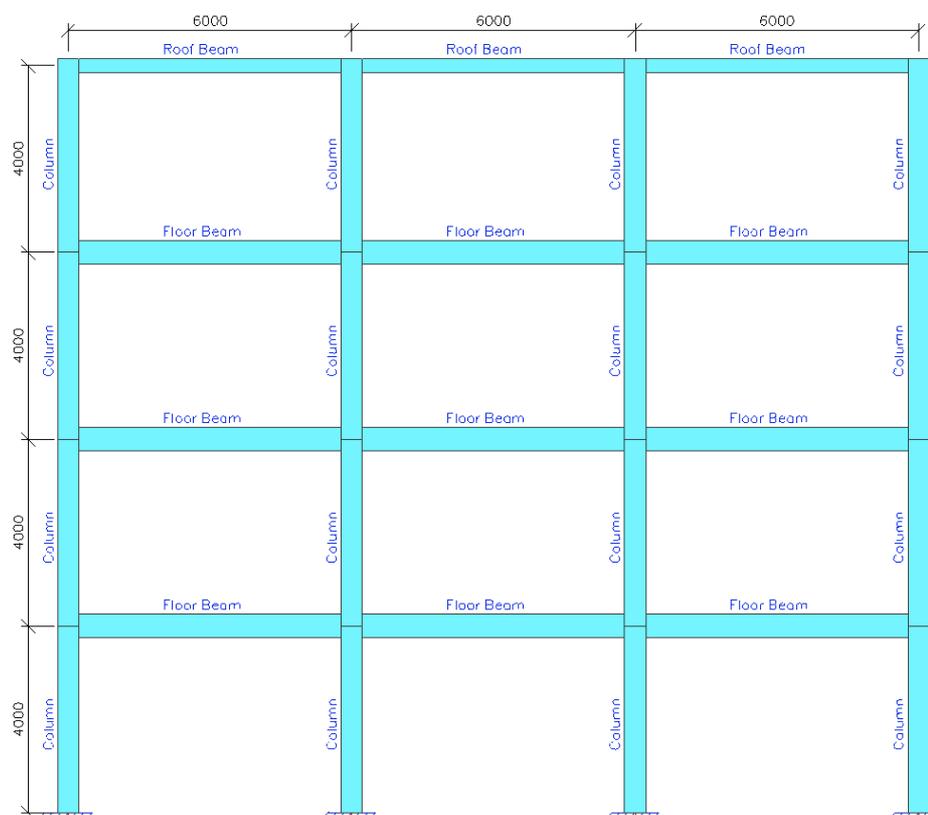
Dans cet exemple, un immeuble de bureaux est modélisé par un portique. Le béton utilisé est de type **C30/37** selon l'**EC-EN**. Le bâtiment a quatre étages de **4m** de hauteur. Dans le sens horizontal, le cadre est composé de quatre poteaux espacés de **6 mètres**. Dans le sens hors plan, les portiques sont espacés de 5m. Les bases des poteaux sont encastrées.

Les membres du portique ont les sections suivantes:

- Poteaux : **Rectangulaire 300 x 450**
- Les poutres de plancher: **Rectangulaire 250 x 500**
- Les poutres de toiture : **Rectangulaire 150 x 300**

Les charges verticales agissant sur la structure sont les suivantes :

- Le **pooids propre** des membres en béton
- Le poids des étages: **5 kN/m<sup>2</sup>**
- Le poids du toit: **2 kN/m<sup>2</sup>**
- Une charge d'exploitation de catégorie B (Bureau) de **3 kN/m<sup>2</sup>**



Ceci donne trois Cas de charges statiques :

LC1 : **Poids propre**

LC2 : Charge permanente : **25 kN/m** sur les poutres de plancher, **10 kN/m** sur les poutres de toiture

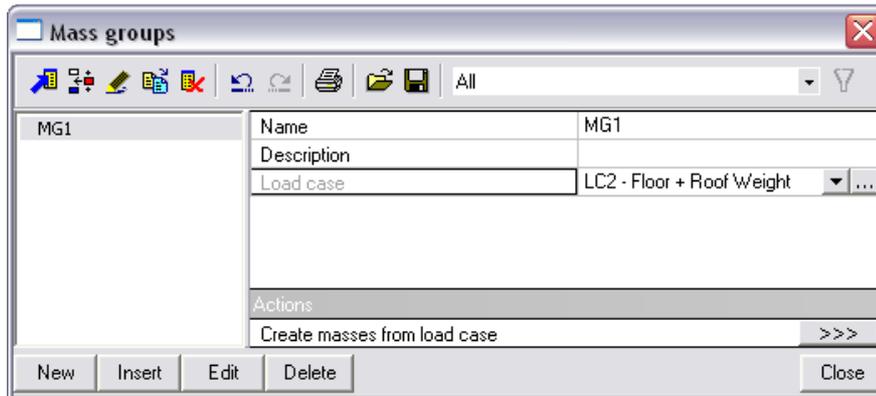
LC3 : Charge variable : **15 kN/m** sur les poutres de plancher

Etape 1 : La première étape du Calcul Dynamique consiste à activer la fonctionnalité **Dynamique** dans l'onglet **Fonctionnalités** qui se trouve dans les **Paramètres du Projet**.

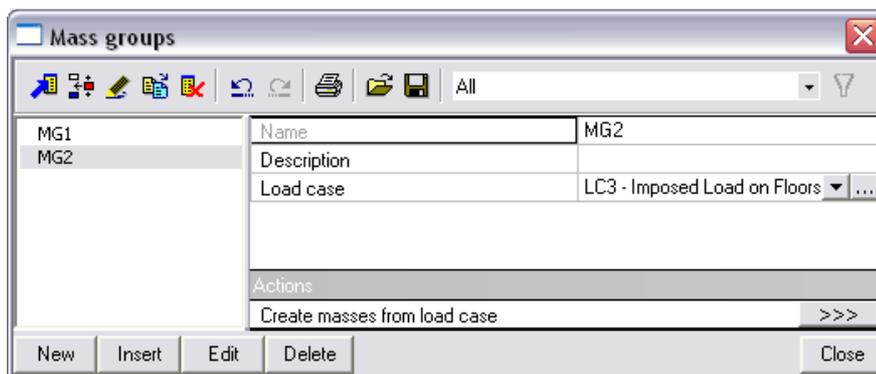
Etapes 2&3: La deuxième étape consiste à créer des **Groupes de Masses**. La troisième est de créer des **Masses**.

Etant donné que le poids propre est automatiquement pris en compte dans une **Combinaison de Groupes de Masses**, deux **Groupes de Masses** sont créés, un pour chaque cas de charge statique.

Pour le Groupe de masse **MG1**, le cas de charge **LC2** est choisi : le poids des planchers et de la toiture. En utilisation l'action **Générer des masses à partir d'un cas de charge** vous avez la possibilité de générer automatiquement des masses à partir des charges déjà saisies.



De la même manière, vous pouvez créer le Groupe de masses **MG2** dans lequel les masses sont automatiquement générées à partir du cas de charge **LC3** : la charge d'exploitation.



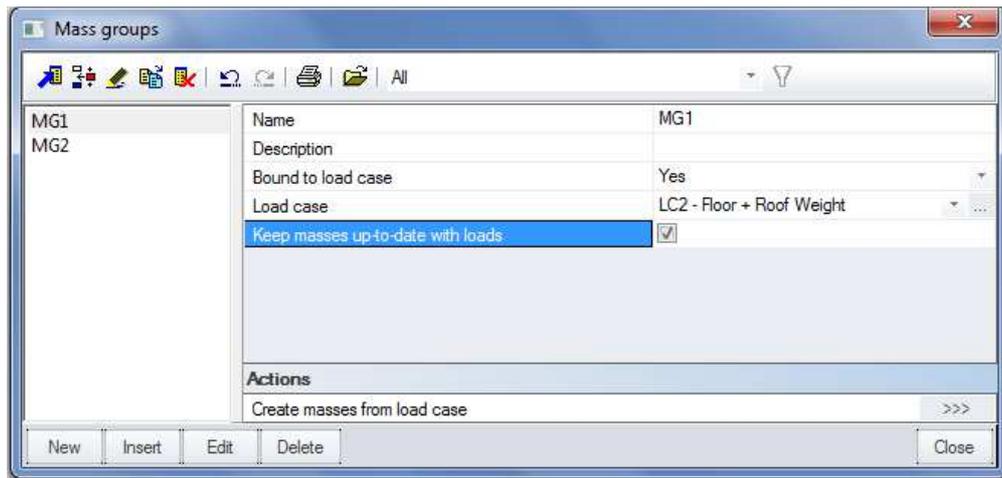
**Remarque :**

---

Comme indiqué dans le premier exemple, lorsque vous créez des masses à partir de charges, SCIA Engineer va utiliser l'accélération de gravité spécifiée dans l'onglet **Charges** qui se trouve dans les **Paramètres du projet**. Par défaut cette valeur est de **9,81 m / s<sup>2</sup>**

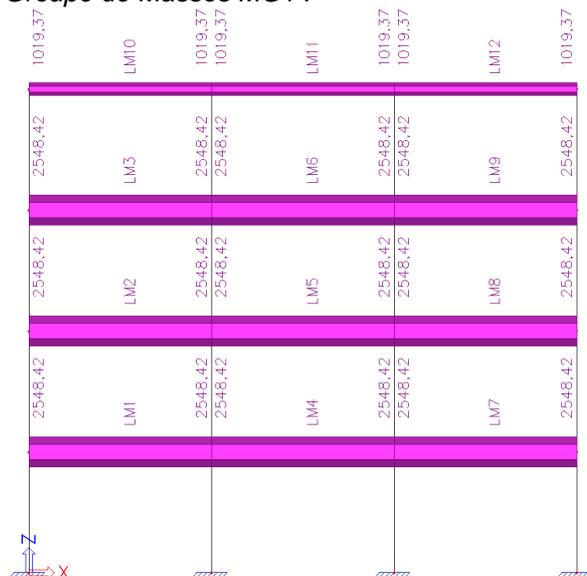
---

A partir de la version 2013, la masse qui a été créée à partir d'un cas de charge peut être régénérée automatiquement lorsque le cas de charge est modifié. Pour lier la masse à un cas de charge, vous devez activer l'option "**Mise à jour automatique des masses générées**":



Dans les versions antérieures à la version 2013, la masse reste inchangée après n'importe quelle modification ou suppression de la charge d'origine. Si vous voulez que la masse corresponde à la charge après modification, il est nécessaire de supprimer la masse et de la régénérer.

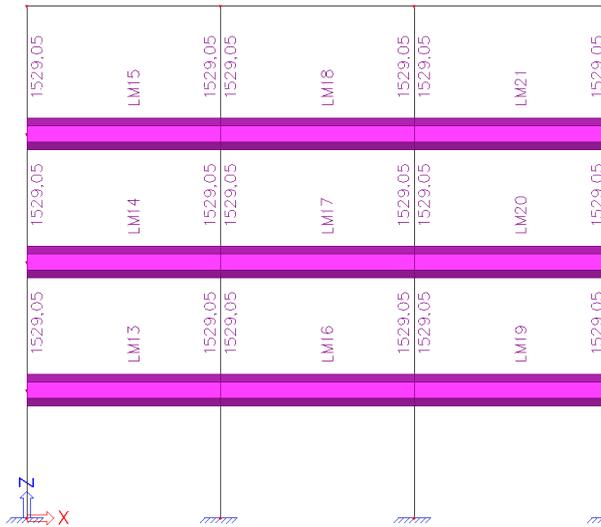
Dans le menu **Masses**, le contenu des deux **Groupes de Masses** peut être visualisé. *Groupe de Masses MG1 :*



$$\text{Masse du plancher : } \frac{25000 \text{ N/m}}{9,81 \text{ m/s}^2} = 2548,4 \text{ kg/m}$$

$$\text{Masse du toit : } \frac{10000 \text{ N/m}}{9,81 \text{ m/s}^2} = 1019,4 \text{ kg/m}$$

*Groupe de Masses MG2 :*



Masse de la charge d'exploitation :  $\frac{15000 N/m}{9,81 m/s^2} = 1529,1 kg/m$

**Etape 4 :** Les deux Groupes de Masses peuvent être combinés dans une **Combinaison de Groupes de Masses**.

Selon l'Eurocode 8 [7], toutes les charges de gravité apparaissant dans la combinaison d'actions suivante doivent être prises en compte pour le calcul des modes propres :

$$\sum G_k + \sum \psi_{E,i} \cdot Q_{k,i} \quad (2.9)$$

- Avec :  $G_k$  = Valeur caractéristique de la charge permanente
- $Q_{k,i}$  = Valeur caractéristique de la charge variable  $i$
- $\psi_{E,i}$  = Coefficient de combinaison de la charge  $i = \varphi \cdot \psi_{2,i}$

Le coefficient de combinaison  $\psi_{E,i}$  prend en compte la probabilité que les charges variables ne soient pas présentes sur toute la structure lorsque survient un tremblement de terre.

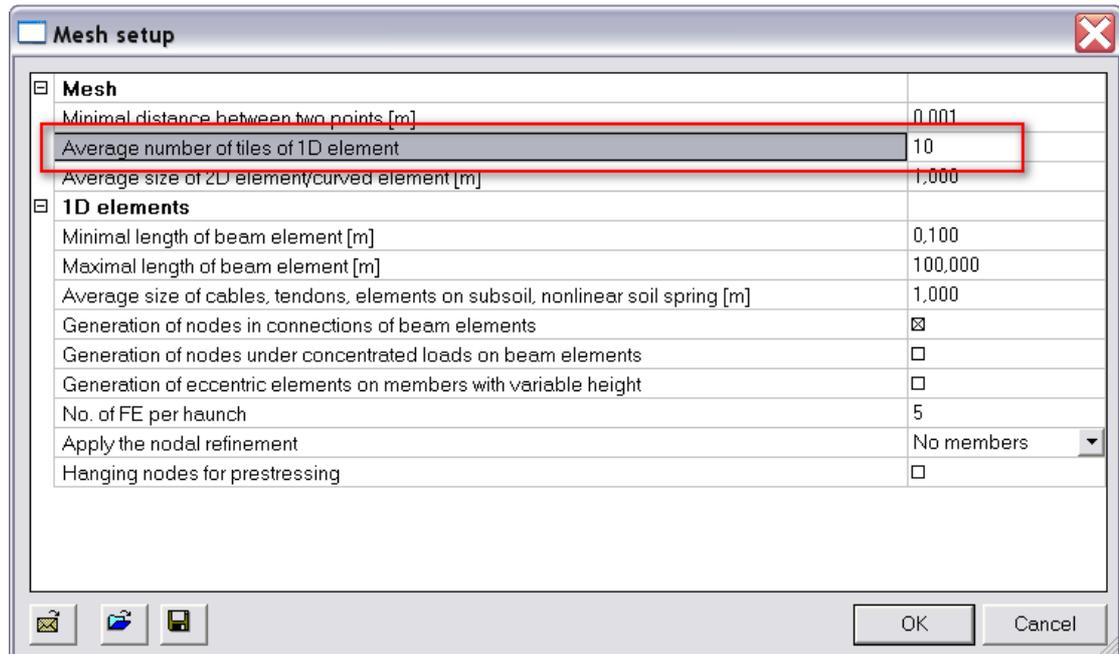
Pour cet exemple, avec une **Catégorie B** de charge d'exploitation et des étages occupés de manière indépendante,  $\varphi$  est pris égal à **0,5** et  $\psi_2$  égal à **0,3**. Cela donne une valeur de **0,15** pour  $\psi_{E,i}$

La Combinaison de Groupes de Masses **CM1** peut alors être formulée comme : **1,00 MG1 + 0,15 MG2**.



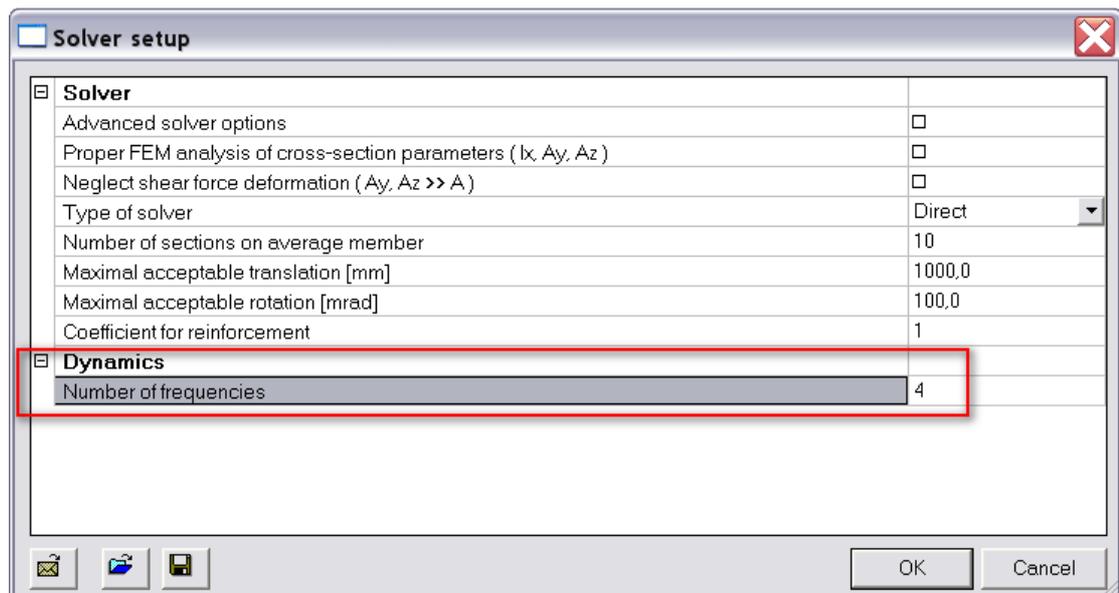
**Etape 5 :** Pour obtenir des résultats précis dans le cas du calcul dynamique, le maillage doit être raffiné.

Ceci peut être réalisé en allant dans **Calcul, Maillage > Configuration du Maillage**



Afin d'obtenir une bonne distribution des masses réparties sur les barres, le **Nombre moyen de division des éléments 1D** est pris égal à 10.

**Etape 6 :** La dernière étape avant de lancer le calcul consiste à définir le nombre de modes propres à calculer. La valeur par défaut dans **Calcul, Maillage > Solveur** est de 4. Cela est suffisant pour cet exemple.

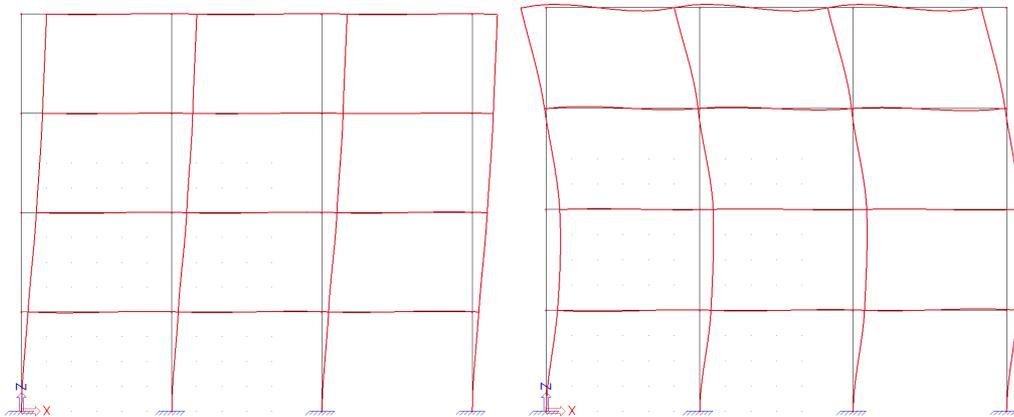


**Etape 7 :** Le calcul de Fréquences Propres peut être exécuté à partir de **Calcul, Maillage > Calcul**.

Les résultats suivants sont obtenus :

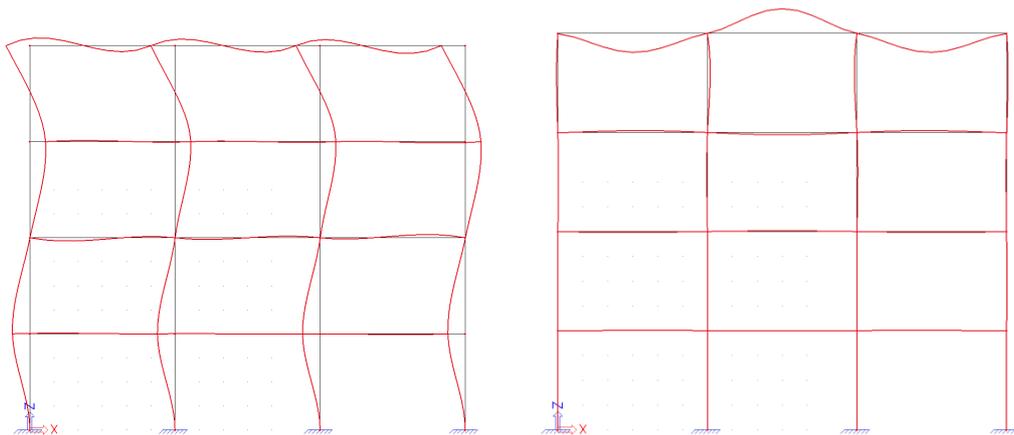
<b>Eigen frequencies</b>				
N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
<b>Mass combination : CM1</b>				
1	1,28	8,01	64,19	0,78
2	3,70	23,26	541,06	0,27
3	6,01	37,76	1425,65	0,17
4	8,26	51,89	2692,46	0,12

Avec les modes propres correspondants :



Mode propre 1:  $f = 1,28$  Hz

Mode propre 2:  $f = 3,70$  Hz



Mode propre 3:  $f = 6,01$  Hz

Mode propre 4:  $f = 8,26$  Hz

Le **Protocole de Calcul** pour le calcul des **Fréquences Propres** donne :

Sum of masses			
[kg]	X	Y	Z
Combination of mass groups 1	208578.62	0.00	208578.62

Modal participation factors							
Number	Omega	Period	Freq. [Hz]	Damp ratio	Wxi / Wxtot	Wyi / Wytot	Wzi / Wztot
1	8.0122	0.7842	1.2752	0.0000	0.8347	0.0000	0.0000
2	23.2614	0.2701	3.7022	0.0000	0.0979	0.0000	0.0000
3	37.7589	0.1664	6.0095	0.0000	0.0422	0.0000	0.0000
4	51.8905	0.1211	8.2586	0.0000	0.0000	0.0000	0.0019
					0.9748	0.0000	0.0019

La somme des masses peut être calculée comme suit :

- Selon le Métré, le poids propre du portique est de 40500 kg.

Bill of material			
Name	Mass [kg]	Surface [m <sup>2</sup> ]	Volume [mm <sup>3</sup> ]
Total results :	40500,0	193,200	1,6200e+010

Cependant, pour les quatre poteaux, la moitié de la masse d'un élément 1D est guidée vers l'appui et ne participe pas à la vibration libre.

- La longueur du poteau est 4m
- Etant donné que 10 éléments 1D pour membre ont été utilisés, la longueur d'un élément 1D est  $4\text{m} / 10 = 0,4\text{m}$
- La longueur de la moitié d'un élément 1D est  $0,4\text{m} / 2 = 0,2\text{m}$
- Les poteaux ont une section de  $0,135\text{ m}^2$  et une masse volumique de  $2500\text{ kg/m}^3$ 
  - ⇒ La masse des poteaux qui n'est pas prise en compte :
 
$$4 \times 0,135\text{ m}^2 \times 0,2\text{ m} \times 2500\text{ kg/m}^3 = 270\text{ kg}$$
  - ⇒ La masse de poids propre qui est prise en compte est :  $40500\text{ kg} - 270\text{ kg} = 40230\text{ kg}$
- Pour MG1 la masse des planchers est  $9 \times 2548,42\text{ kg/m} \times 6\text{m} = 137614,68\text{ kg}$
- Pour MG1 la masse du toit est  $3 \times 1019,37\text{ kg/m} \times 6\text{m} = 18348,66\text{ kg}$
- Pour MG2 la masse de la charge d'exploitation est  $9 \times 1529,05\text{ kg/m} \times 6\text{m} = 82568,7\text{ kg}$

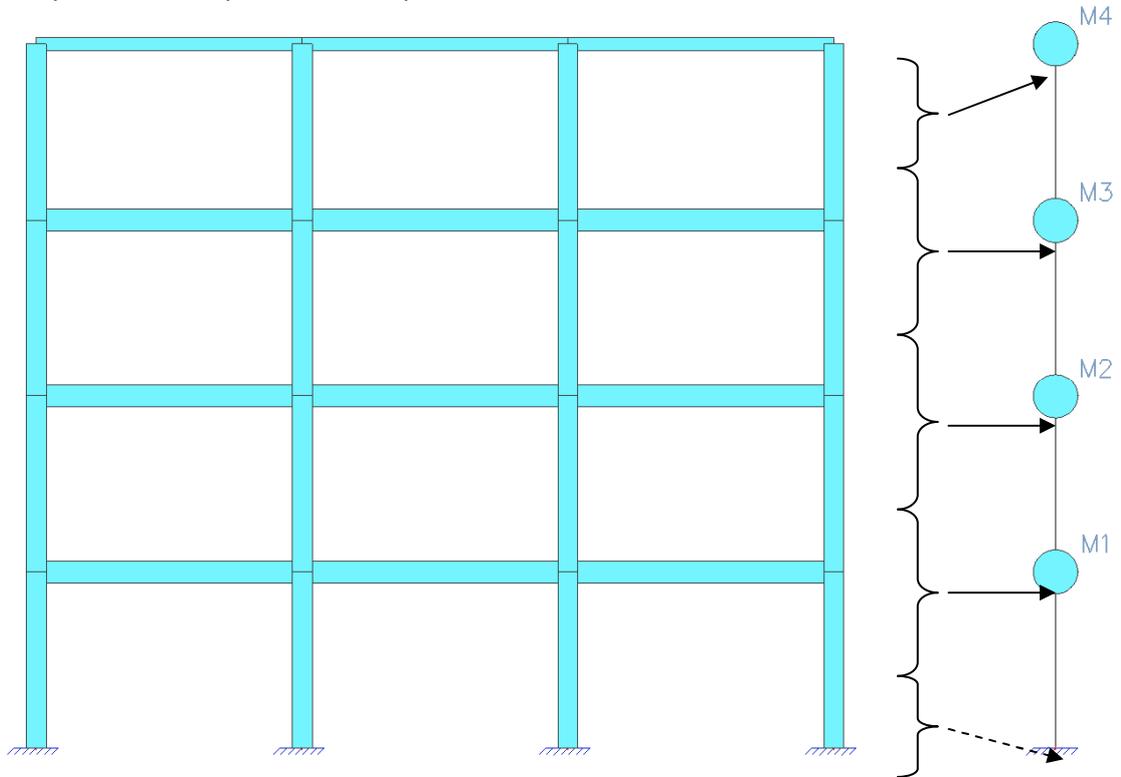
Toutefois, seulement 15% a été prise en compte =>  $0,15 \times 82568,7\text{ kg} = 12385,31\text{ kg}$

$$\Rightarrow \text{Masse vibrante} = 40230\text{ kg} + 137614,68\text{ kg} + 18348,66\text{ kg} + 12385,31\text{ kg} = 208578,65\text{ kg}$$

## Calcul manual

In order to check the results of SCIA Engineer, the lowest eigen frequency of this structure is calculated by means of the Rayleigh Method.

As specified in the previous Example, the frame is idealized to a cantilever:



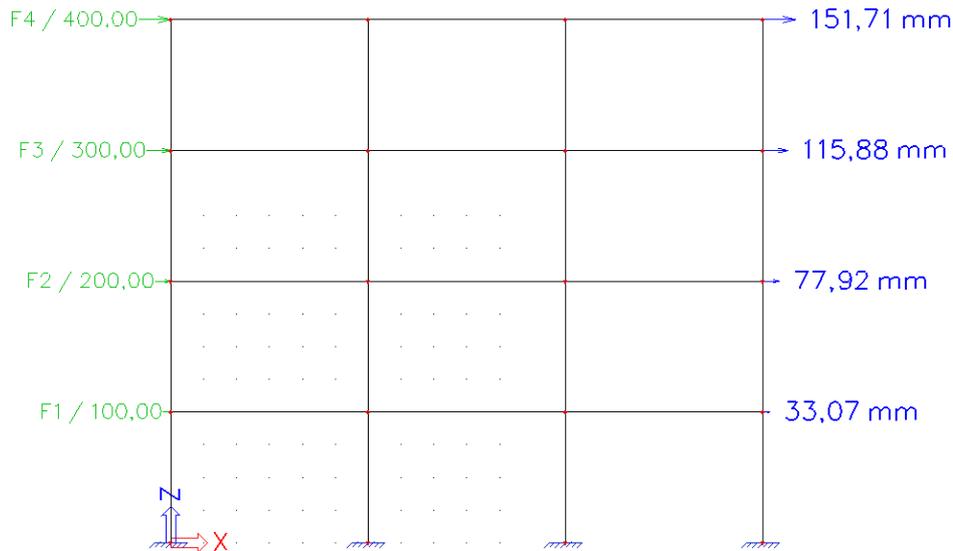
The masses  $M_1$ ,  $M_2$  and  $M_3$  can be calculated as follows:

- Self-Weight of three floor beams and four columns:
  - ⇒  $3 \times 0,125 \text{ m}^2 \times 2500 \text{ kg/m}^3 \times 6 \text{ m} = 5625 \text{ kg}$
  - ⇒  $4 \times 0,135 \text{ m}^2 \times 2500 \text{ kg/m}^3 \times 4 \text{ m} = 5400 \text{ kg}$
  - ⇒  $5625 \text{ kg} + 5400 \text{ kg} = 11025 \text{ kg}$
- Floor weight of mass group MG1:
  - ⇒  $3 \times 2548,42 \text{ kg/m} \times 6 \text{ m} = 45871,56 \text{ kg}$
- Weight of Imposed load of mass group MG2 (15%)
  - ⇒  $0,15 \times 3 \times 1529,05 \text{ kg/m} \times 6 \text{ m} = 4128,44 \text{ kg}$
- Total:  $11025 \text{ kg} + 45871,56 \text{ kg} + 4128,44 \text{ kg} = \mathbf{61024,995 \text{ kg}}$

The mass  $M_4$  can be calculated as follows:

- Self-Weight of three roof beams and half of four columns:
  - ⇒  $3 \times 0,045 \text{ m}^2 \times 2500 \text{ kg/m}^3 \times 6 \text{ m} = 2025 \text{ kg}$
  - ⇒  $0,5 \times 4 \times 0,135 \text{ m}^2 \times 2500 \text{ kg/m}^3 \times 4 \text{ m} = 2700 \text{ kg}$
  - ⇒  $2025 \text{ kg} + 2700 \text{ kg} = 4725 \text{ kg}$
- Roof weight of mass group MG1:
  - ⇒  $3 \times 1019,37 \text{ kg/m} \times 6 \text{ m} = 18348,66 \text{ kg}$
- Total:  $4725 \text{ kg} + 18348,66 \text{ kg} = \mathbf{23073,66 \text{ kg}}$

In order to calculate the horizontal deformations  $d_i$  of each floor level due to a linearly increasing load  $F_i$ , a static load case is calculated with SCIA Engineer consisting of loads of **100 kN**, **200 kN**, **300 kN** and **400 kN**. The following results are obtained for the nodal deformations:



- ⇒  $F_1 = 100 \text{ kN} = 100000 \text{ N}$
- ⇒  $F_2 = 200 \text{ kN} = 200000 \text{ N}$
- ⇒  $F_3 = 300 \text{ kN} = 300000 \text{ N}$
- ⇒  $F_4 = 400 \text{ kN} = 400000 \text{ N}$
- ⇒  $d_1 = 33,07 \text{ mm} = 0,03307 \text{ m}$
- ⇒  $d_2 = 77,92 \text{ mm} = 0,07792 \text{ m}$
- ⇒  $d_3 = 115,88 \text{ mm} = 0,11588 \text{ m}$
- ⇒  $d_4 = 151,71 \text{ mm} = 0,15171 \text{ m}$

Applying formula (2.8):

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{100000N \cdot 0,03307m + 200000N \cdot 0,07792m + 300000N \cdot 0,11588m + 400000N \cdot 0,15171m}{61024,995kg \cdot (0,03307m)^2 + 61024,995kg \cdot (0,07792m)^2 + 61024,995kg \cdot (0,11588m)^2 + 23073,66kg \cdot (0,15171m)^2}}$$

$$f = 1,27 \text{ Hz}$$

This result corresponds to the **1,28 Hz** calculated by SCIA Engineer.

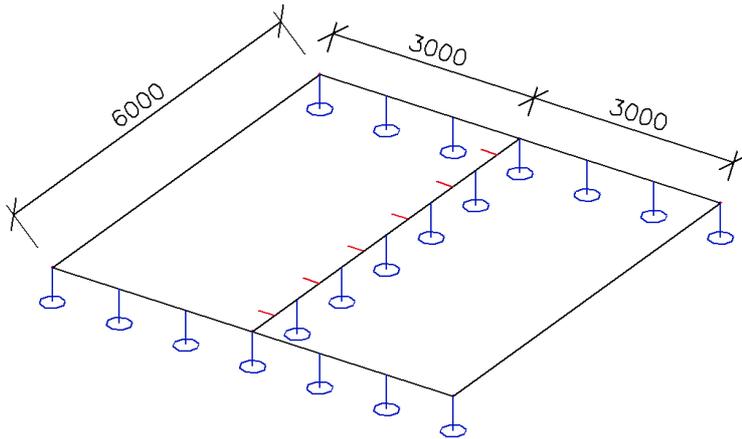
## 2.4 Dalles

Le dernier paragraphe de ce chapitre illustre la procédure à suivre pour effectuer le calcul des Fréquences propres d'une plaque. La méthode appliquée est tout à fait la même que pour les portiques. Ceci est illustré dans l'exemple suivant.

### Exemple 4: Free\_Vibration\_4.esa

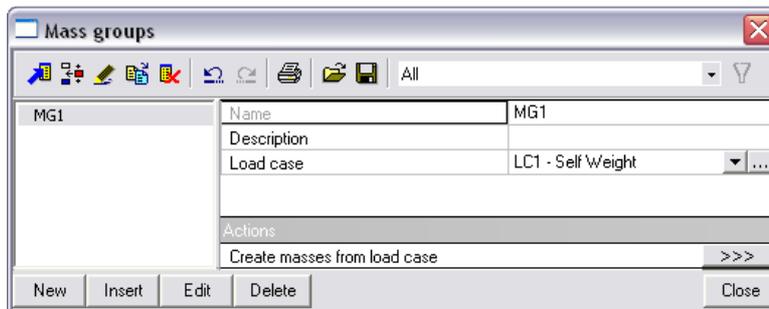
Dans cet exemple, une dalle rectangulaire avec plusieurs portées est modélisée. La dalle a une longueur et une largeur de **6m**. La dalle a une épaisseur de **0,06 m** et est fabriquée à partir du **S235** selon l'**EC-EN**. Sur deux côtés, la dalle est simplement appuyée, sur les deux autres, la dalle est libre. Au milieu de la dalle, perpendiculairement aux deux bords simplement appuyés, un appui linéaire est introduit.

Un cas de charge statique est créé : le **poids propre** de la dalle.



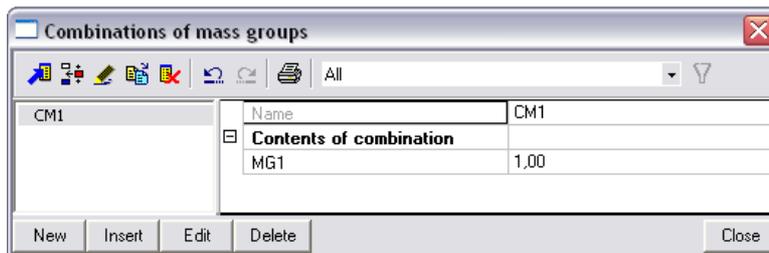
**Etape 1 :** La première étape dans le calcul dynamique consiste à activer la **Fonctionnalité Dynamique** à partir de l'onglet fonctionnalités qui se trouve dans les **Paramètres du Projet**.

**Etapes 2&3 :** Ensuite, il faut créer un **Groupe de Masses**



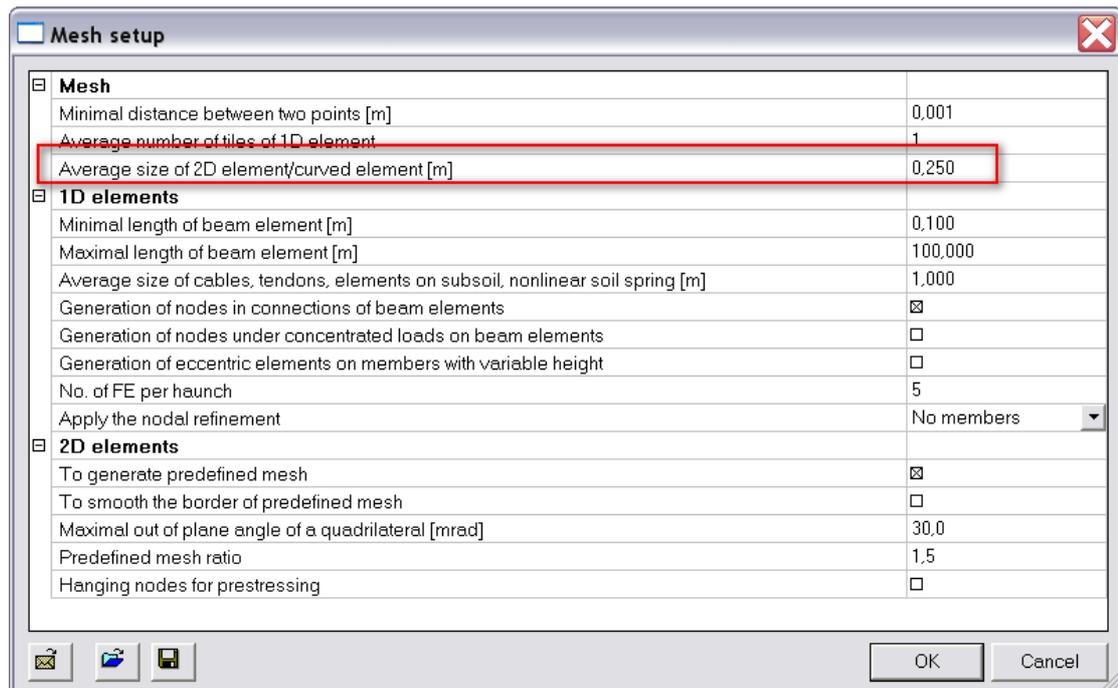
Etant donné que le calcul de Fréquences Propres sera effectué pour le poids propre de la dalle, l'introduction d'autres masses n'est pas nécessaire.

**Etape 4 :** Une **Combinaison de Groupes de Masses** doit maintenant être créée.



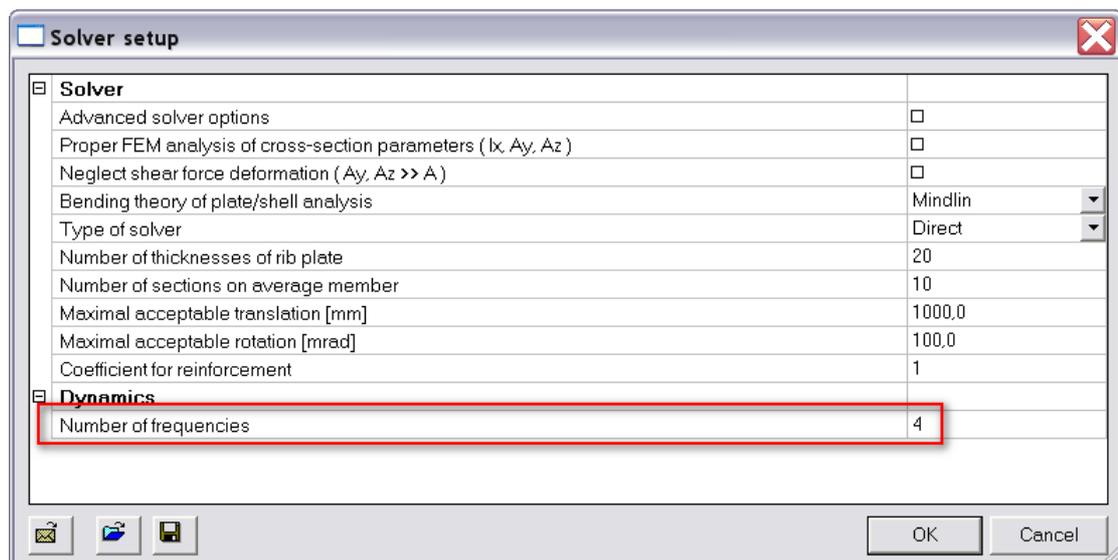
**Etape 5 :** Pour obtenir des résultats précis dans le cas des calculs dynamiques, le maillage doit être raffiné.

Comme pour les portiques, cela peut être fait à partir de **Calcul, Maillage > Configuration du Maillage**.



La **Taille moyenne des éléments 2D** est prise égale à **0,25m**.

*Etape 6 :* Avant de lancer le calcul, il faut définir le nombre de modes propres à calculer. La valeur par défaut dans **Calcul, Maillage > Solveur** est **4**. Cela est suffisant pour cet exemple.

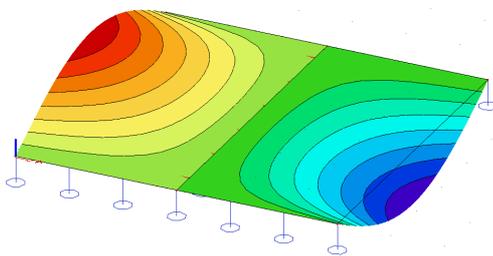


*Etape 7 :* Le calcul de **Fréquences Propres** peut être effectué à travers **Calcul, Maillage > Calcul**.

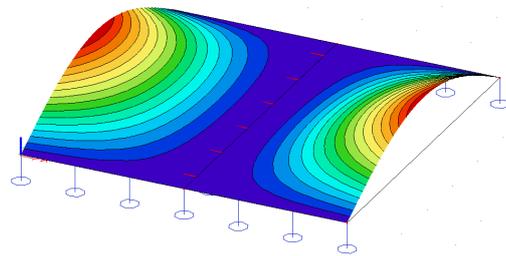
Nous obtenons les résultats suivants :

<b>Eigen frequencies</b>				
N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
<b>Mass combination : CM1</b>				
1	6,68	41,96	1760,78	0,15
2	9,44	59,32	3518,37	0,11
3	19,39	121,85	14846,46	0,05
4	21,05	132,25	17489,08	0,05

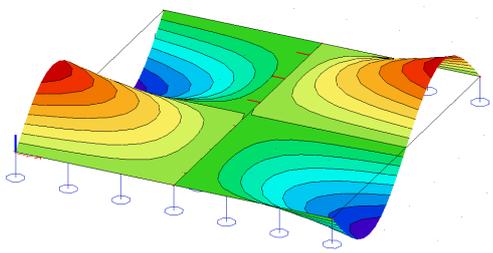
De même que pour les portiques, les modes propres peuvent être visualisés à travers le **Déplacement des Nœuds** pour les **Surfaces**. La **Déformée de la structure** pour les valeurs **Uz** donne :



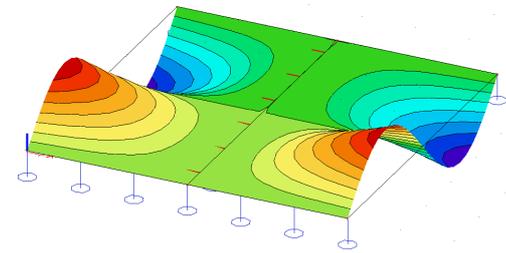
Mode propre 1: f = **6,68 Hz**



Mode propre 2: f = **9,44 Hz**



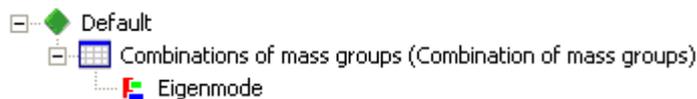
Mode propre 3: f = **19,39 Hz**



Mode propre 4: f = **21,05 Hz**

**Remarques :**

- En allant dans **Surfaces** > **Déplacement des Nœuds** > **Déformée du Maillage** vous affichez la déformation pour les éléments 2D et 1D. Cela vous permet de voir le mode propre complet pour une structure qui contient les deux types à la fois, c'est-à-dire des projets de type Général XYZ.
- Pour générer rapidement les Modes propres, le document peut être utilisé : L'image d'un seul mode propre peut être imbriquée dans **Combinaisons de Groupes de Masses** :



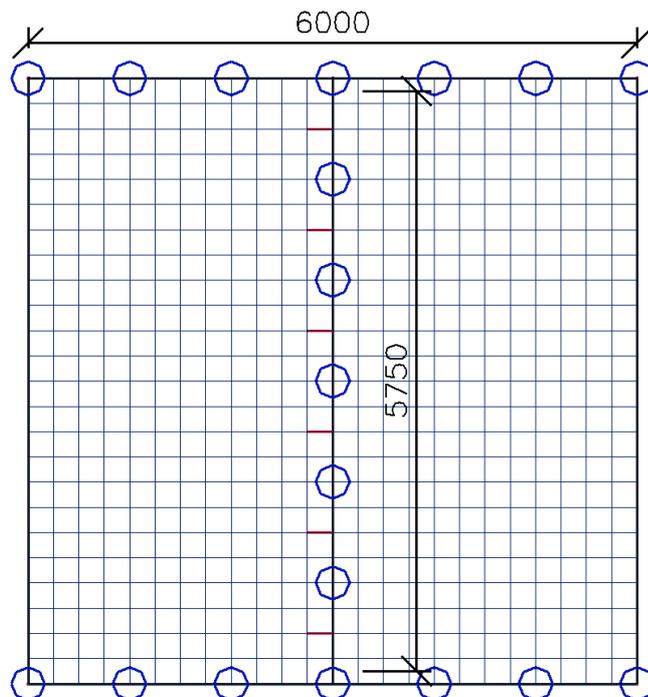
De cette façon, tous les Modes propres sont générés automatiquement.

Le **Protocole de Calcul** pour le calcul des **Fréquences Propres** montre que la Somme des masses suivante est prise en compte :

Sum of masses			
	X	Y	Z
Combination of mass groups 1	0.00	0.00	15572.44

Cette valeur peut être calculée comme suit :

- Le poids total de la dalle est  $6 \text{ m} \times 6 \text{ m} \times 0,06 \text{ m} \times 7850 \text{ kg/m}^3 = 16956 \text{ kg}$
- La moitié de la masse des éléments se trouvant à proximité des appuis externes est reprise par les appuis et ne participe pas à la vibration. Etant donné que la taille du maillage est égale à  $0,25 \text{ m}$ , la moitié de la taille d'un élément 2D est  $0,125 \text{ m}$ .
  - ⇒  $2 \times 6 \text{ m} \times 0,125 \text{ m} \times 0,06 \text{ m} \times 7850 \text{ kg/m}^3 = 706,5 \text{ kg}$
- La même chose s'applique aux appuis internes, cela dit la masse des deux éléments sur les nœuds de début et de fin a déjà été prise en compte dans le calcul précédent. Il reste donc une longueur de  $6 \text{ m} - 0,125 \text{ m} - 0,125 \text{ m} = 5,75 \text{ m}$ . La figure suivante illustre cette longueur.
  - ⇒  $2 \times 5,75 \text{ m} \times 0,125 \text{ m} \times 0,06 \text{ m} \times 7850 \text{ kg/m}^3 = 677,06 \text{ kg}$



- La masse totale prise en compte dans le calcul des Fréquences Propres :
  - ⇒  $16956 \text{ kg} - 706,5 - 677,06 = \mathbf{15572,44 \text{ kg}}$

## Calcul Manuel

In order to check the results of SCIA Engineer, the eigen frequencies of the slab are calculated by a manual calculation.

The method used here is described in reference [14] In this reference; the eigen frequency of a multi-span slab is expressed in terms of a non-dimensional parameter  $\lambda$ .

$$\lambda = \frac{\omega L^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (2.10)$$

With:

$\omega$  = Circular frequency

L = Distance between the two simply supported external edges

$\rho$  = Density of the slab material

h = Slab thickness

$$D = \text{flexural rigidity of the slab} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.11)$$

E = Modulus of Young

$\nu$  = Poisson's Ratio

In this Example, the material properties are the following:

L = 6 m

$\rho$  = 7850 kg/m<sup>3</sup>

h = 0,06 m

E = 210.000 N/mm<sup>2</sup> = 2,1 e<sup>11</sup> N/m<sup>2</sup>

$\nu$  = 0,3

$$\Rightarrow D = \frac{2,1e^{11} \frac{N}{m^2} \cdot (0,06m)^3}{12 \cdot (1 - 0,3^2)} = 4153846,15 \text{ Nm}$$

The values for  $\lambda$  for the first four modes, for a slab with two edges simply supported and two edges free, a h/L ratio of 0,01 and an internal edge on position 0,5L are given in reference [14]:

Mode 1:  $\lambda = 1,6309$

Mode 2:  $\lambda = 2,3050$

Mode 3:  $\lambda = 4,7253$

Mode 4:  $\lambda = 5,1271$

Using these parameters in formula (2.10), the circular frequencies can be calculated:

Mode 1:  $\omega = 41,99 \text{ rad/s} \Rightarrow f = \mathbf{6,68 \text{ Hz}}$

Mode 2:  $\omega = 59,34 \text{ rad/s} \Rightarrow f = \mathbf{9,45 \text{ Hz}}$

Mode 3:  $\omega = 121,66 \text{ rad/s} \Rightarrow f = \mathbf{19,36 \text{ Hz}}$

Mode 4:  $\omega = 132 \text{ rad/s} \Rightarrow f = \mathbf{21,01 \text{ Hz}}$

The results correspond perfectly to the results calculated by SCIA Engineer:

Mode 1: f = **6,68 Hz**

Mode 2: f = **9,44 Hz**

Mode 3: f = **19,39 Hz**

Mode 4: f = **21,05 Hz**

### 3. Vibration forcée : Charge harmonique

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au calcul des vibrations forcées. La structure va maintenant être soumise à une charge harmonique.

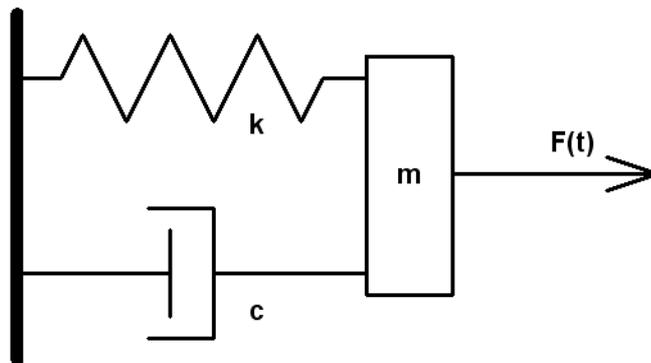
Le calcul des vibrations forcées peut être requis pour vérifier la réponse d'un bâtiment se trouvant à proximité d'un chemin de fer ou d'une voie de circulation importante, pour vérifier les vibrations dues aux machines, pour vérifier la résistance d'un plancher servant à un cours d'aérobic, ...

Comme dans le chapitre précédent, la théorie sera d'abord exposée et ensuite illustrée par des exemples. Ceux-ci seront également vérifiés par des calculs manuels.

#### 3.1 Théorie

Pour comprendre ce qui se passe lors de l'analyse dynamique d'une structure complexe avec des portiques ou des éléments finis, la vibration forcée d'un système à un seul degré de liberté est considérée en détail. Une analyse complète peut être trouvée dans la référence [1]

Considérons le système suivant :



Un corps de masse  $m$  peut se déplacer dans une seule direction. Un ressort de raideur constante  $k$  est fixé à une extrémité et attaché à un corps à l'autre extrémité. La masse est également soumise à un amortissement d'une capacité  $c$ . Une force externe  $F(t)$  dépendant du temps est appliquée à la masse.

L'équation de mouvement peut s'écrire:

$$m \cdot \ddot{y}(t) + c \cdot \dot{y}(t) + k \cdot y(t) = F(t) \quad (3.1)$$

Lorsque la force agissant sur ce système est une charge harmonique, l'équation (3.1) peut être réécrite comme suit :

$$m \cdot \ddot{y}(t) + c \cdot \dot{y}(t) + k \cdot y(t) = F \cdot \sin(\nu \cdot t) \quad (3.2)$$

Avec :  $F$  = Amplitude de la charge harmonique  
 $\nu$  = Fréquence circulaire de la charge harmonique

Une solution de l'équation est :

$$y(t) = e^{-\xi \omega t} \cdot (A \cos(\omega_D \cdot t) + B \sin(\omega_D \cdot t)) + Y_S \cdot \frac{\sin(\nu \cdot t - \theta)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3.3)$$

Avec :

$$Y_S = \frac{F}{k} \quad \text{La déflexion statique} \quad (3.4)$$

$$\xi = \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega} \quad \text{Le taux d'amortissement} \quad (3.5)$$

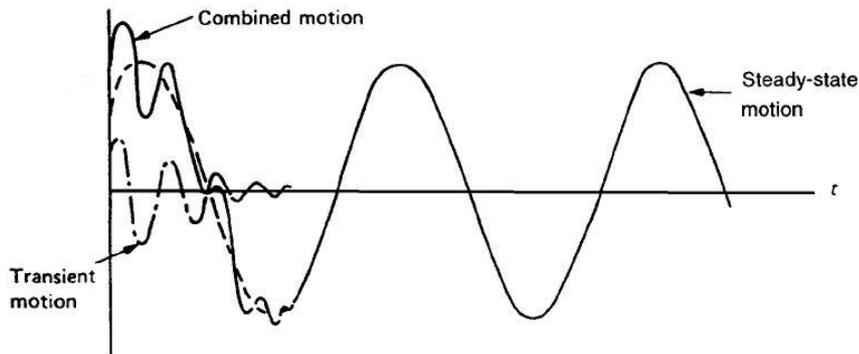
$$\omega_D = \omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{La fréquence circulaire amortie} \quad (3.6)$$

$$\tan(\theta) = \frac{2 \cdot \xi \cdot r}{1 - r^2} \quad (3.7)$$

$$r = \frac{V}{\omega} \quad \text{Le rapport de fréquence} \quad (3.8)$$

L'angle  $\theta$  signifie que le vecteur déplacement est déphasé par rapport au vecteur force. En d'autres termes, le mouvement se produit après un certain temps de l'application de la force. A et B sont des constantes qui sont déterminées à partir des valeurs initiales du déplacement et de la vitesse.

Le premier terme de l'équation (3,3) est appelé régime transitoire. Le second terme est appelé régime établi. Les deux termes sont illustrés sur la figure suivante :



L'amplitude de la réponse transitoire décroît de façon exponentielle ( $e^{-\xi \omega t}$ ). Par conséquent, dans la plupart des applications pratiques, ce terme est négligé et la réponse  $y(t)$  peut être considérée comme égale à la réponse en régime établi (après quelques périodes de la charge appliquée).

L'équation (3.3) peut alors s'écrire sous une forme plus commode:

$$\frac{Y}{Y_s} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3.9)$$

$\frac{Y}{Y_s}$  est connu sous le nom de **Facteur d'Amplification Dynamique** parce que  $Y_s$  est la déflexion statique du système soumis à la charge constante  $F$  et  $Y$  est l'amplitude dynamique.

La largeur des vibrations mécaniques provient essentiellement des grandes valeurs de  $\frac{Y}{Y_s}$  atteintes en pratique lorsque le rapport de fréquence  $r$  a une valeur proche de l'unité. Cela signifie qu'une petite force harmonique peut produire une grande amplitude de vibration. Ce phénomène est connu sous le nom de résonance. Dans ce cas, l'amplitude dynamique n'atteint pas une valeur infinie, mais une valeur limite de  $\frac{Y_s}{2\xi}$ .

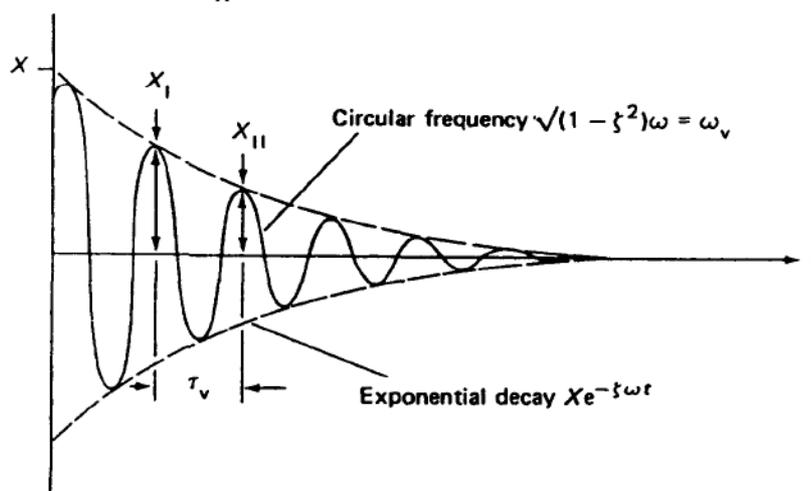
### 3.2 Charge harmonique dans SCIA Engineer

Dans SCIA Engineer, une charge harmonique peut être saisie après la création d'une Combinaison de Groupes de Masses. Cela implique que les étapes à suivre pour effectuer un calcul de Fréquences Propres sont valables encore ici et sont complétées par la définition des propriétés de la Charge Harmonique.

Conformément à la théorie, une charge harmonique est définie par une fréquence d'excitation et une amplitude. Pour spécifier le taux d'amortissement de la structure, le **décroissement logarithmique** peut être introduit. [1]

Le décroissement logarithmique  $\Lambda$  est le logarithme népérien du rapport entre deux amplitudes successives dans la même direction. Ceci est illustré sur la figure suivante :

$$\Lambda = \ln \frac{X_1}{X_{11}} \quad (3.10)$$



Le **décroissement logarithmique**  $\Lambda$  est lié au **taux d'amortissement**  $\xi$  par la formule suivante :

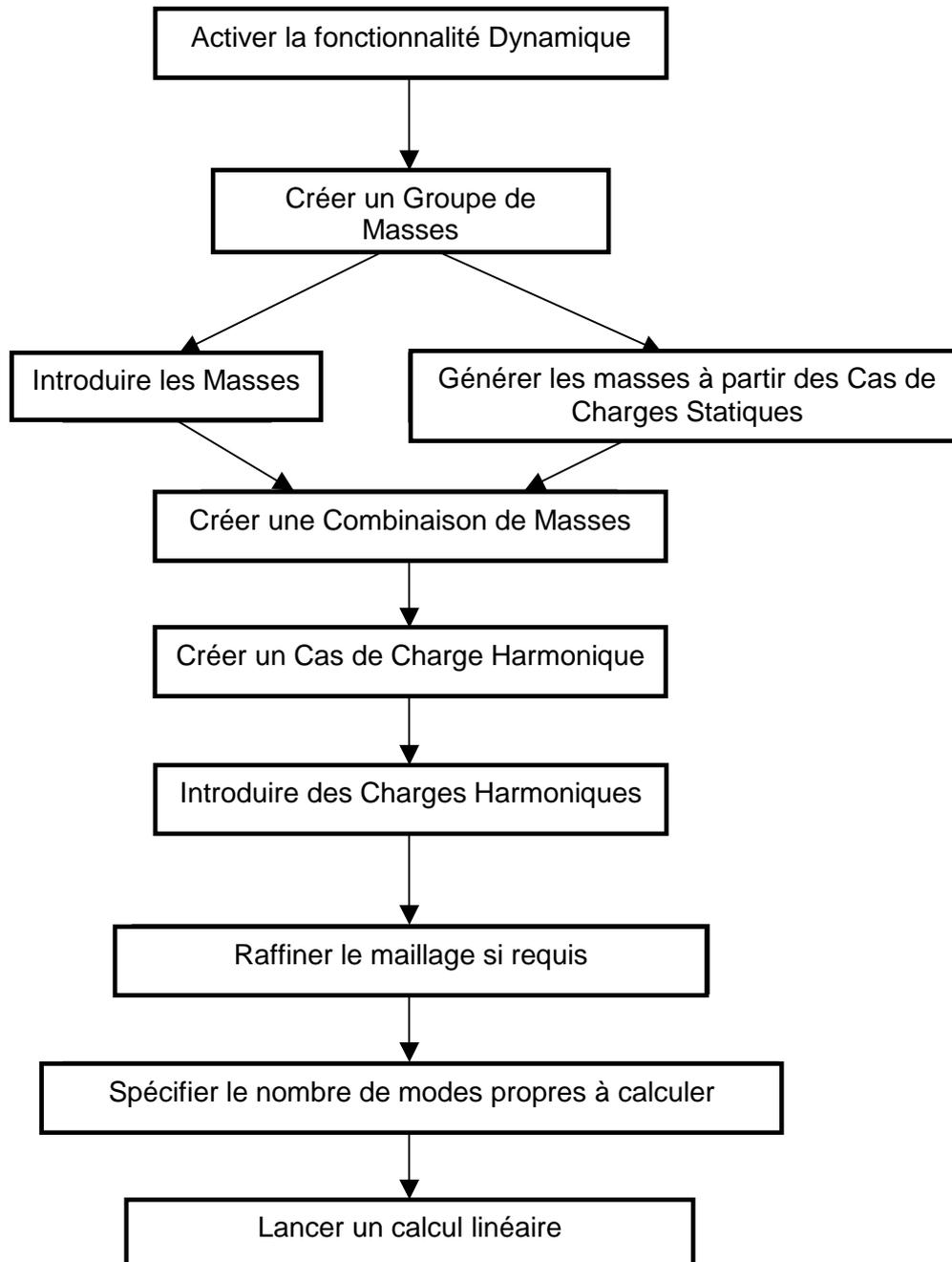
$$\Lambda = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (3.11)$$

Le taux d'amortissement et le décroissement logarithmique sont considérés plus en détail dans le chapitre 5.

Les Charges Harmoniques dans SCIA Engineer sont toujours définies comme forces nodales, soit une charge au nœud ou un moment au nœud. Plus d'un nœud de la structure peut être chargé dans un cas de charge, mais la fréquence de toutes les sollicitations est égale à la fréquence d'excitation spécifiée pour le cas de charge.

Comme spécifié dans la théorie, les résultats statiques sont multipliés par le facteur d'amplification dynamique. Le calcul dynamique est ainsi transformé en un calcul statique équivalent. Par conséquent, un calcul linéaire doit être exécuté. Au cours de ce calcul, les fréquences propres seront également déterminées puisque ces résultats sont nécessaires pour calculer l'effet de la Charge Harmonique.

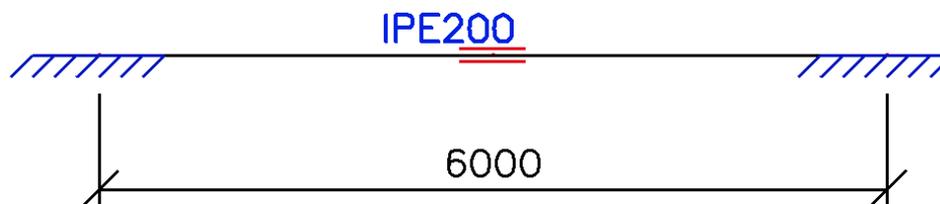
Le diagramme suivant montre les étapes à suivre pour effectuer un calcul de vibrations forcées :



Ce diagramme est illustré à travers les exemples suivants.

### Exemple 5: Forced Vibration 1.esa

Dans cet exemple, une poutre sur deux appuis encastrés est modélisée. La poutre a une section de type **IPE 200**, une longueur de **6m** et est fabriquée en **S235** selon l'**EC-EN**. Un nœud a été ajouté au milieu de la poutre, au niveau duquel une masse de **200 kg** sera saisie.

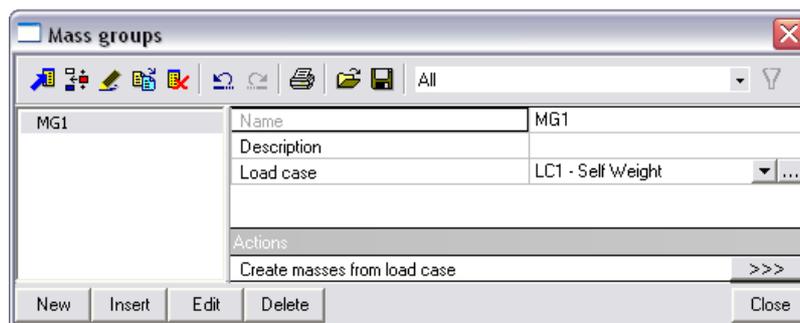


Un cas de charge statique est créé : le **pooids propre** de la poutre. Toutefois, afin de ne pas prendre celui ci en compte pour le calcul dynamique, la masse volumique du **S235** peut être modifiée dans la **Bibliothèque des Matériaux**, nous prendrons **1 kg / m<sup>3</sup>**. Ceci rendra la vérification des résultats par un calcul manuel plus facile.

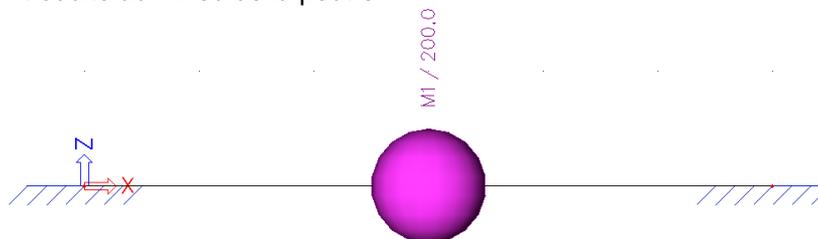
La masse de **200 kg** vibre avec une fréquence de **5 Hz**. Le taux d'amortissement du système est considéré comme égal à **5%**.

**Etape 1 :** La première étape dans le calcul dynamique consiste à activer la **Fonctionnalité Dynamique** à partir de l'onglet fonctionnalités qui se trouve dans les **Paramètres du Projet**.

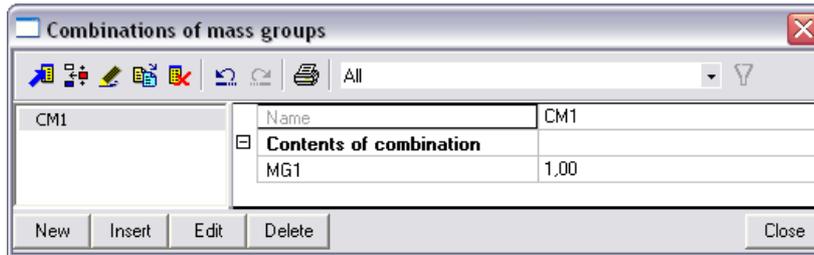
**Etape 2 :** Ensuite il faut créer un **Groupe de Masse**



**Etape 3 :** Après la création des Groupes de Masses, la masse de **200 kg** peut être introduite au milieu de la poutre.



**Etape 4 :** Les Groupes de Masses sont alors mis dans une **Combinaison de Groupes de Masses**, celle-ci sera utilisée pour définir la charge harmonique.

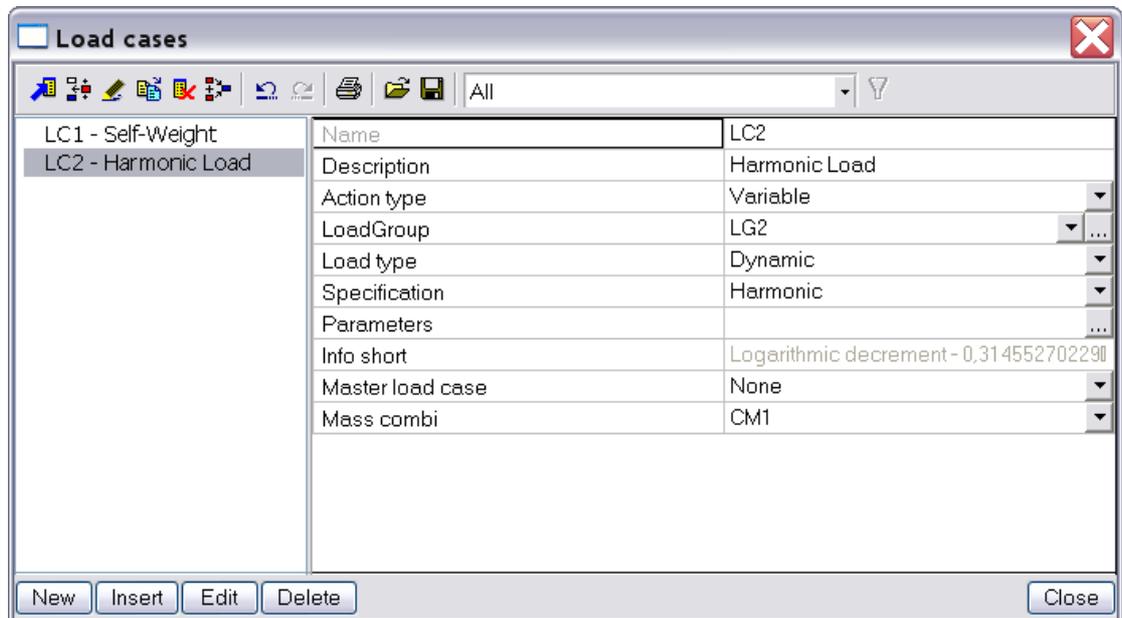


**Etape 5 :** Après avoir créé une **Combinaison de Groupes de Masses**, un cas de charge **harmonique** peut être défini dans **Cas de Charges, Combinaisons > Cas de Charges**.

Le **Type d'Action** est mis sur **Variable**

Le **Type de Charge** est changé en **Dynamique**

Dans le champ **Spécification**, le type de cas de charge dynamique est choisi. Dans ce cas, c'est un cas de charge **Harmonique**.

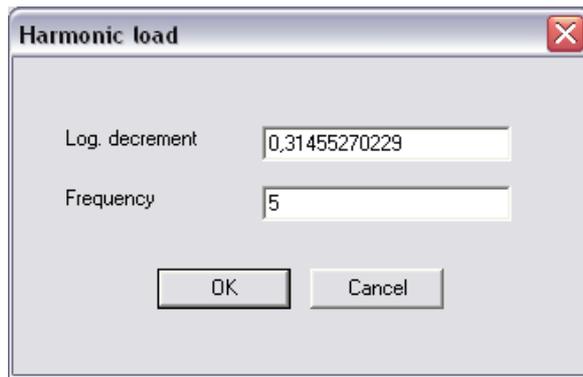


La dernière option, **Combi Masse** montre la **Combinaison de Masses** qui sera utilisée pour le calcul du cas de charge harmonique.

Pour spécifier les paramètres du cas de charge harmonique, il faut utiliser le bouton **...** qui se trouve derrière **Paramètres**.

La fréquence d'excitation de la charge harmonique est **5Hz**. Le taux d'amortissement est égal à **5%**. En appliquant la formule (3.11) le **décrément logarithmique** peut être calculé :

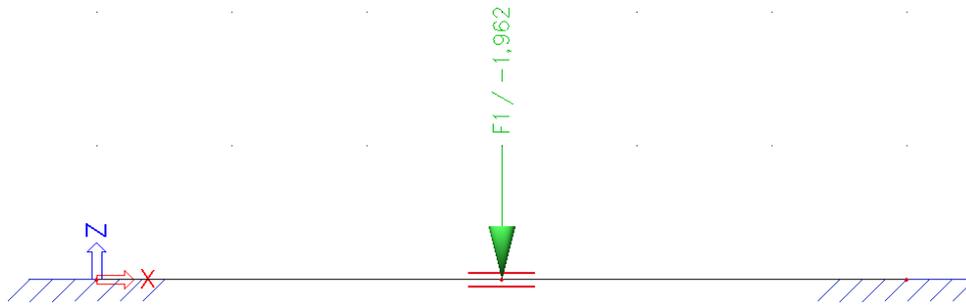
$$\Lambda = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,05}{\sqrt{1-(0,05)^2}} = 0,31455270229$$



**Etape 6 :** Les paramètres du cas de charge ont été définis, ce qui reste à faire est de saisir l'amplitude de la charge.

La masse est de **200 kg**. Cela correspond à une charge de **1,962 kN** en prenant **9,81 m/s<sup>2</sup>** pour l'accélération de la pesanteur.

Cette charge peut être saisies avec **Charge > Force Ponctuelle > Au Nœud**

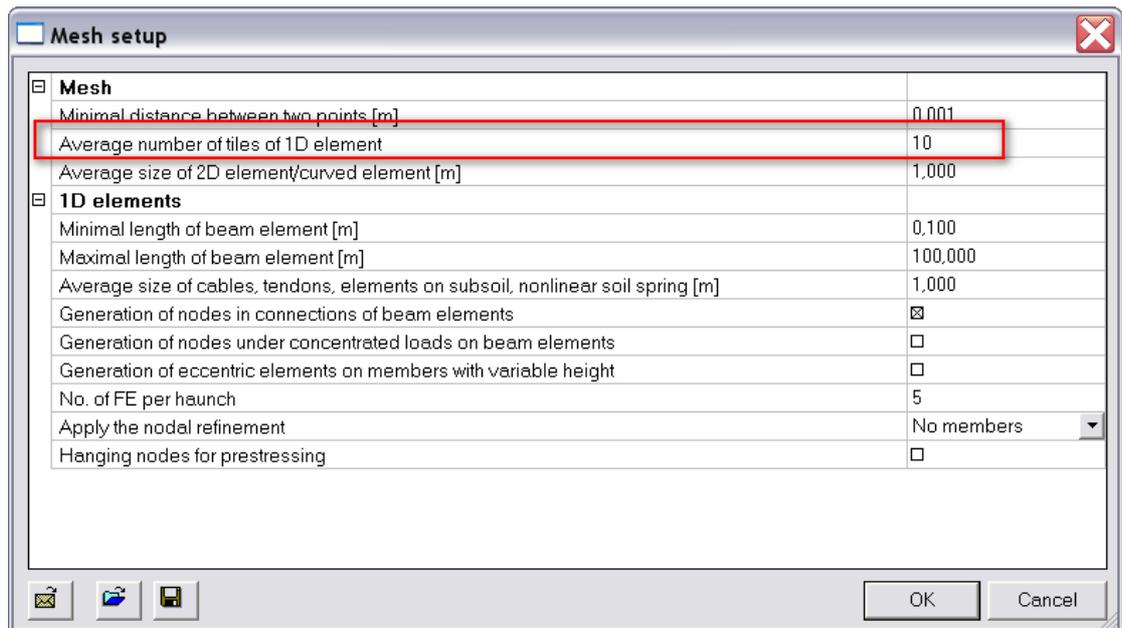


**Remarque :**

*Comme spécifié dans la théorie, plus d'une charge harmonique peuvent être saisies dans le cas de charge harmonique. Cependant, les paramètres harmoniques tels que l'amortissement et la fréquence d'excitation sont définis au niveau du cas de charge. Cela implique que, par exemple, quand plusieurs charges harmoniques vibrent avec des fréquences différentes, des cas de charge différents doivent être créés.*

**Etape 7 :** Pour obtenir des résultats précis avec le calcul dynamique, le maillage doit être raffiné.

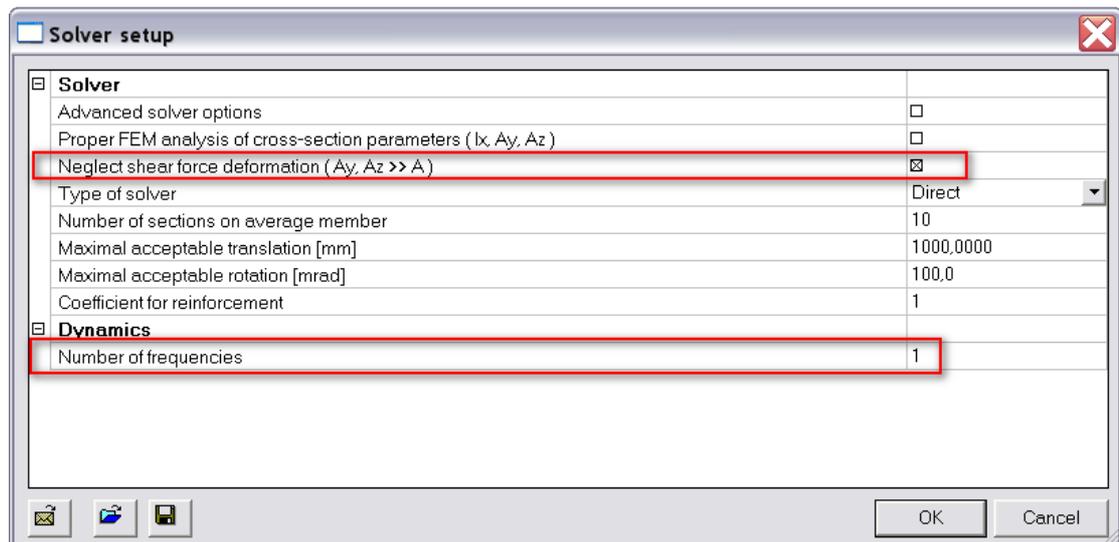
Cela peut être fait à partir de **Calcul, Maillage > Configuration du Maillage**.



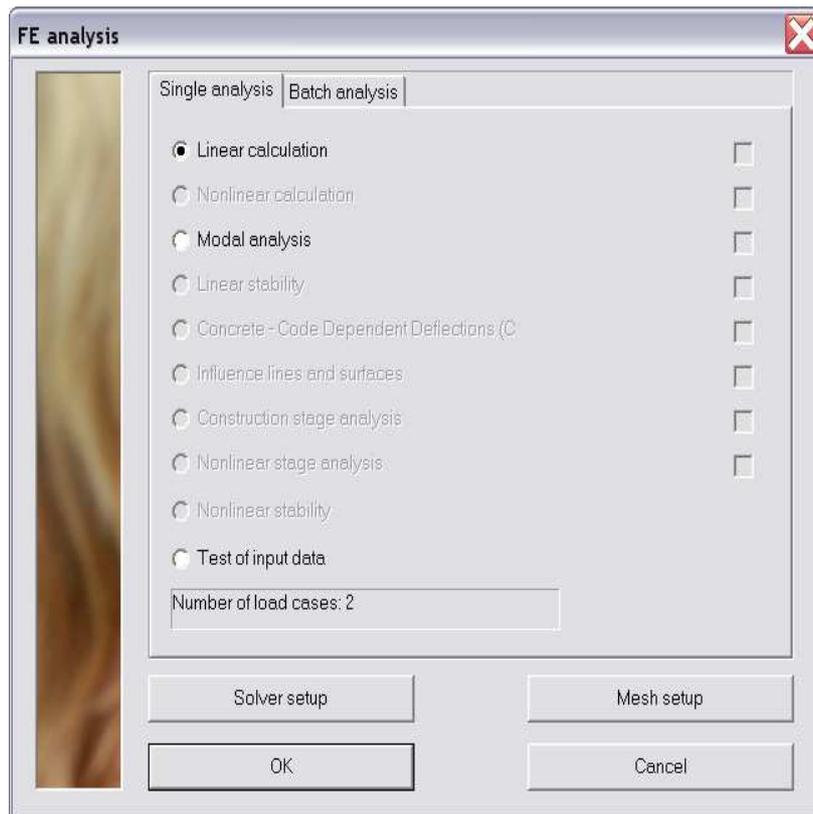
Le Nombre moyen de division des éléments 1D est pris égal à 10.

**Etape 8 :** La dernière étape avant de lancer le calcul consiste à définir le nombre de modes propres à calculer. Pour cet exemple, un seul mode propre est nécessaire. Dans **Calcul, Maillage > Solveur**, le nombre de fréquences est 1.

Pour comparer les résultats avec un calcul manuel, les **déformations d'effort tranchant** sont négligées.



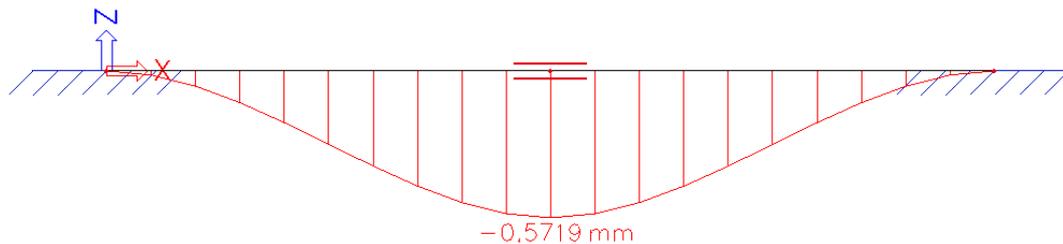
**Etape 9 :** Toutes les étapes ont été exécutées, le calcul linéaire peut donc être lancé avec **Calcul, Maillage > Calcul**.



Nous obtenons les résultats suivants :

<b>Eigen frequencies</b>				
N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
<b>Mass combination : CM1</b>				
1	21,43	134,66	18132,59	0,05

La déformation pour le cas de charge harmonique est la suivante :



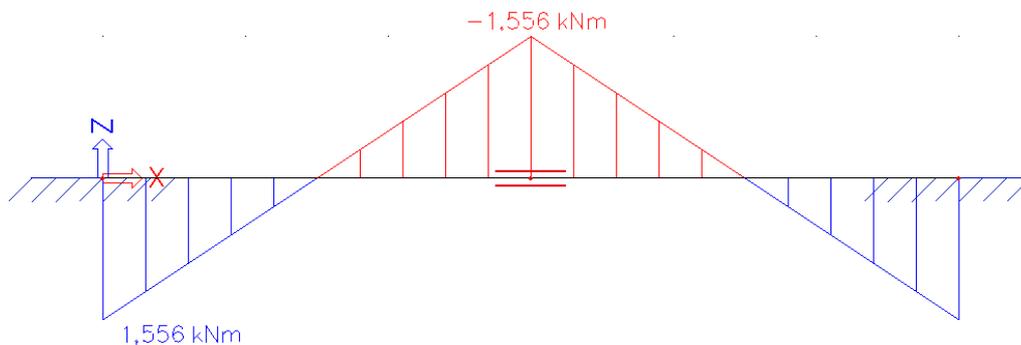
### Deformations on member

Linear calculation, Extreme : Global, System : LCS  
 Selection : All  
 Load cases : LC2

Member	Case	dx [m]	ux [mm]	uz [mm]	fy [mrad]
B1	LC2	0,000	0,0000	0,0000	0,0
B1	LC2	3,000	0,0000	-0,5719	0,0
B1	LC2	4,500	0,0000	-0,2860	-0,3
B1	LC2	1,500	0,0000	-0,2860	0,3

Il est cependant très important de garder à l'esprit qu'il s'agit d'une vibration : une demi-période plus tard, la déformation est à la face supérieure de la poutre au lieu de la face inférieure.

Ceci est encore plus clair lorsqu' on regarde le diagramme du moment pour la charge harmonique :



### Internal forces on member

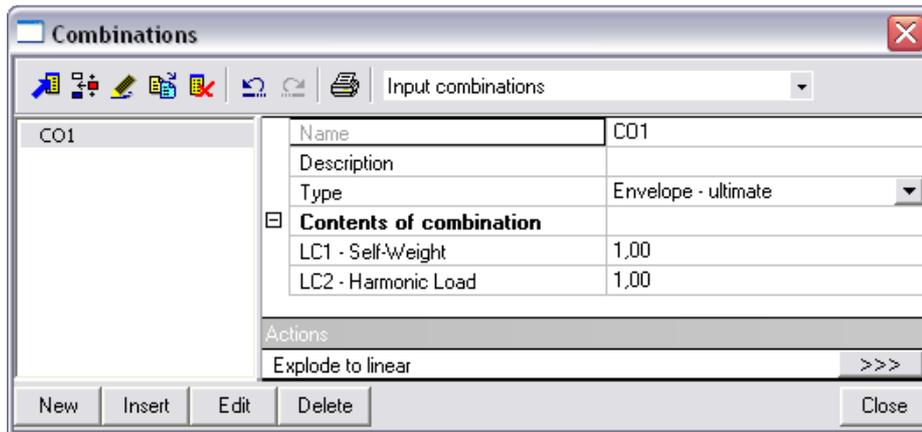
Linear calculation, Extreme : Global, System : LCS  
 Selection : All  
 Load cases : LC2

Member	Case	dx [m]	N [kN]	Vz [kN]	My [kNm]
B1	LC2	0,000	0,000	-1,037	1,556
B1	LC2	2,700	0,000	-1,037	-1,245
B1	LC2	3,300	0,000	1,037	-1,245
B1	LC2	3,000	0,000	-1,037	-1,556

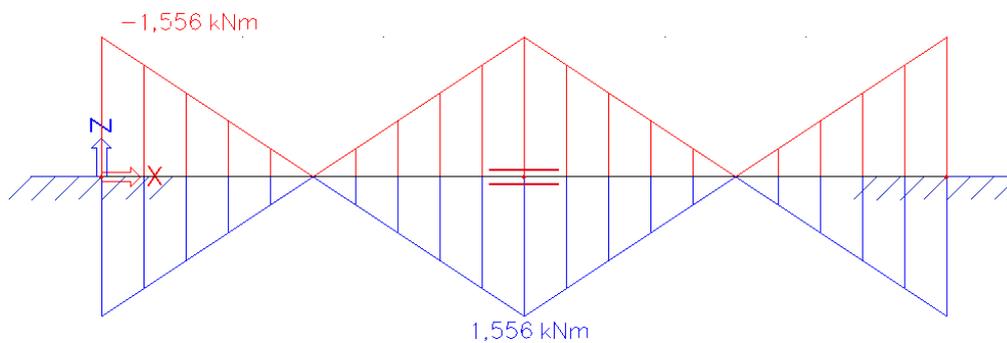
Pour un calcul statique, on s'attend à l'inverse de ce diagramme des moments. Cependant, avec un calcul dynamique, il faut toujours prendre en compte les deux directions du chargement puisque la charge vibre dans les deux directions.

Dans SCIA Engineer, cela peut se faire facilement en créant des combinaisons selon la norme ou de type enveloppe. Dans ces combinaisons générées, le cas de charge dynamique sera pris en compte à la fois avec un coefficient positif et négatif. De cette façon, les vibrations sont considérées dans les deux sens.

Dans cet exemple, une combinaison de type **Enveloppe - ultime** est créée. Elle contient le poids propre et le cas de charge harmonique.



Le diagramme des moments pour cette combinaison est le suivant :



L'effet des vibrations est correctement pris en compte : les deux côtés de la vibration sont visibles. Ceci est également indiqué dans la **Clé des Combinaisons** du **Document** qui montre les deux combinaisons linéaires générées à partir de la Combinaison Enveloppe (Extrêmes locaux) :

1. Combination key	
Name	Description of combinations
1	LC1*1.00 +LC2*-1.00
2	LC1*1.00 +LC2*1.00

## Calcul Manuel

In order to check the results of SCIA Engineer, a manual calculation is performed. First, the calculated eigen frequency is checked using formula (2.3). Using default engineering tables [11], the maximum static deformation of a beam with length L, clamped at both sides and loaded with a load F in the middle is given as:

$$\delta_{\max} = \frac{FL^3}{192EI} \quad (3.12)$$

With:

$$F = 1,962 \text{ kN} = 1962 \text{ N}$$

$$L = 6\text{m} = 6000 \text{ mm}$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$I = 19430000 \text{ mm}^4$$

$$\delta_{\max} = \frac{1962 \text{ N} \cdot (6000 \text{ mm})^3}{192 \cdot 210.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 19430000 \text{ mm}^4} = 0,54095 \text{ mm}$$

The rigidity k of this system can then be calculated:

$$k = \frac{F}{\delta_{\max}} = \frac{1962 \text{ N}}{0,54095 \text{ mm}} = 3626,93 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 3626933,33 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Applying formula (2.3):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3626933,33 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{200 \text{ kg}}} = 134,67 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \mathbf{21,43 \text{ Hz}}$$

This result corresponds exactly to the result calculated by SCIA Engineer.

Now the eigen frequency is known, the results of the harmonic load can be verified. The harmonic load had a forcing frequency of **5 Hz**, which corresponds to a circular frequency of **31,416 rad/s**.

Applying formula (3.8) the frequency ratio can be calculated:

$$r = \frac{\nu}{\omega} = \frac{31,416 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{134,67 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = \mathbf{0,233289}$$

The frequency ratio can then be used in formula (3.9) to calculate the Dynamic Magnification Factor:

$$\frac{Y}{Y_s} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-0,233289^2)^2 + (2 \cdot 0,233289 \cdot 0,05)^2}} = \mathbf{1,0572}$$

This implies that the static results need to be multiplied by **1,0572** to obtain the dynamic results.

The static deformation was calculated as  $\delta_{\max} = 0,54095 \text{ mm}$

$$\Leftrightarrow \text{Dynamic deformation} = 1,0572 \times 0,54095 \text{ mm} = \mathbf{0,5719 \text{ mm}}$$

$\Leftrightarrow$

This result corresponds exactly to the result calculated by SCIA Engineer.

In the same way the moment in the middle of the beam can be calculated.

Using default engineering tables [11], the maximum static moment in the middle of a beam with length  $L$ , clamped at both sides and loaded with a load  $F$  in the middle is given as:

$$M = \frac{FL}{8} = \frac{1,962kN \cdot 6m}{8} = 1,4715kNm$$

$$\Rightarrow \text{Dynamic moment} = 1,0572 \times 1,4715 \text{ kNm} = \mathbf{1,556 \text{ kNm}}$$

This result corresponds exactly to the result calculated by SCIA Engineer.

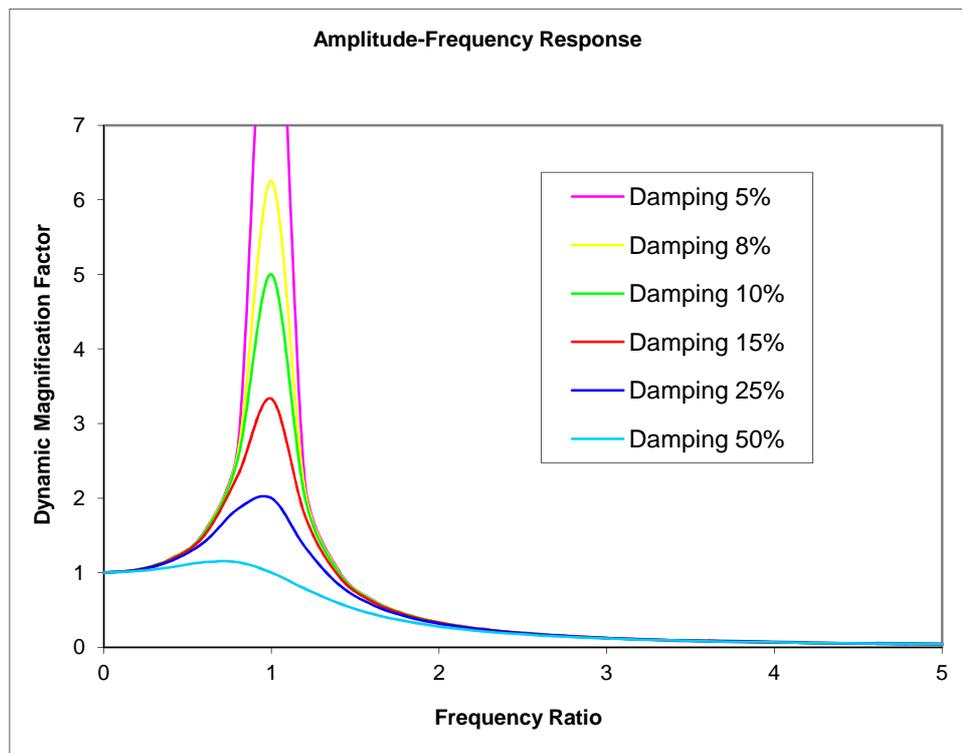
## Résonance

Comme spécifié dans la théorie, la résonance se produit lorsque le rapport de fréquence  $r$  a une valeur proche de l'unité. Dans ce cas, de grandes valeurs du Facteur d'Amplification Dynamique sont obtenues.

Pour illustrer cela, le calcul du Facteur d'Amplification Dynamique pour cet exemple est répété pour différents rapports de fréquences et pourcentages d'amortissement. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Frequency Ratio	Forcing Frequency [Hz]	Mag. factor Damping 5%	Mag. factor Damping 8%	Mag. factor Damping 10%	Mag. factor Damping 15%	Mag. factor Damping 25%	Mag. factor Damping 50%
0,0	0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	4,29	1,0414	1,0411	1,0408	1,0396	1,0361	1,0198
0,4	8,57	1,1891	1,1870	1,1851	1,1785	1,1581	1,0748
0,6	12,86	1,5557	1,5452	1,5357	1,5041	1,4148	1,1399
0,8	17,15	2,7116	2,6173	2,5384	2,3113	1,8582	1,1399
1,0	21,43	10,0000	6,2500	5,0000	3,3333	2,0000	1,0000
1,2	25,72	2,1926	2,0830	1,9952	1,7590	1,3440	0,7824
1,4	30,01	1,0308	1,0144	1,0000	0,9543	0,8417	0,5891
1,6	34,29	0,6377	0,6326	0,6280	0,6127	0,5704	0,4475
1,8	38,58	0,4450	0,4428	0,4408	0,4340	0,4142	0,3480
2,0	42,87	0,3326	0,3315	0,3304	0,3269	0,3162	0,2774
2,2	47,15	0,2600	0,2593	0,2587	0,2567	0,2503	0,2260
2,4	51,44	0,2098	0,2094	0,2090	0,2077	0,2037	0,1876
2,6	55,73	0,1734	0,1732	0,1729	0,1720	0,1694	0,1582
2,8	60,01	0,1461	0,1459	0,1457	0,1451	0,1432	0,1353
3,0	64,30	0,1249	0,1248	0,1246	0,1242	0,1229	0,1170
3,2	68,59	0,1082	0,1081	0,1080	0,1076	0,1066	0,1023
3,4	72,87	0,0946	0,0946	0,0945	0,0943	0,0935	0,0901
3,6	77,16	0,0836	0,0835	0,0835	0,0833	0,0827	0,0801
3,8	81,45	0,0744	0,0743	0,0743	0,0741	0,0737	0,0716
4,0	85,73	0,0666	0,0666	0,0666	0,0665	0,0661	0,0644
4,2	90,02	0,0601	0,0600	0,0600	0,0599	0,0596	0,0583
4,4	94,31	0,0545	0,0544	0,0544	0,0543	0,0541	0,0530
4,6	98,59	0,0496	0,0496	0,0496	0,0495	0,0493	0,0484
4,8	102,88	0,0454	0,0453	0,0453	0,0453	0,0451	0,0443
5,0	107,17	0,0417	0,0416	0,0416	0,0416	0,0414	0,0408

Afin de tirer des conclusions, les résultats numériques sont tracés graphiquement :



Tout d'abord, le phénomène de résonance est clairement visible. Lorsque le rapport de fréquence est égal à l'unité, le facteur d'amplification dynamique devient très grand. Cela veut dire qu'une petite charge harmonique peut produire une grande amplitude de vibration.

Deuxièmement, l'influence du taux d'amortissement sur la réponse du système en résonance est considérée comme significative. Avec un taux d'amortissement de **5%**, le facteur d'amplification est d'environ **10**, avec un amortissement de **50%**, le facteur d'amplification est réduit à **1**.

A partir de ce graphique, nous pouvons faire les conclusions suivantes :

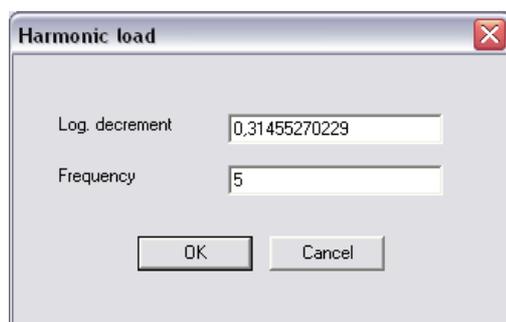
La réponse du système à basses fréquences dépend de la **rigidité**. Dans la région de la résonance, la réponse dépend de l'**amortissement** et à hautes fréquences, la réponse est régie par la **masse** du système.

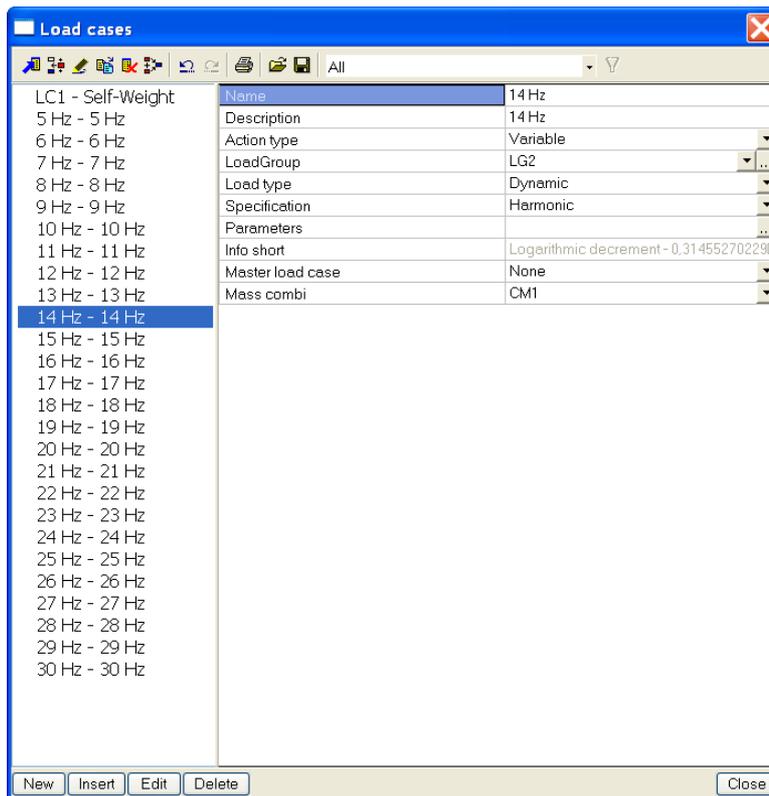
Il est important de garder cela à l'esprit lorsque l'on essaie de réduire la vibration d'une structure. Par exemple, l'augmentation de la valeur de l'amortissement aura peu d'effet si l'excitation et la fréquence de réponse sont dans une région loin de la résonance comme celle contrôlée par la masse de la structure.

L'effet de résonance peut aussi être illustré dans SCIA Engineer.

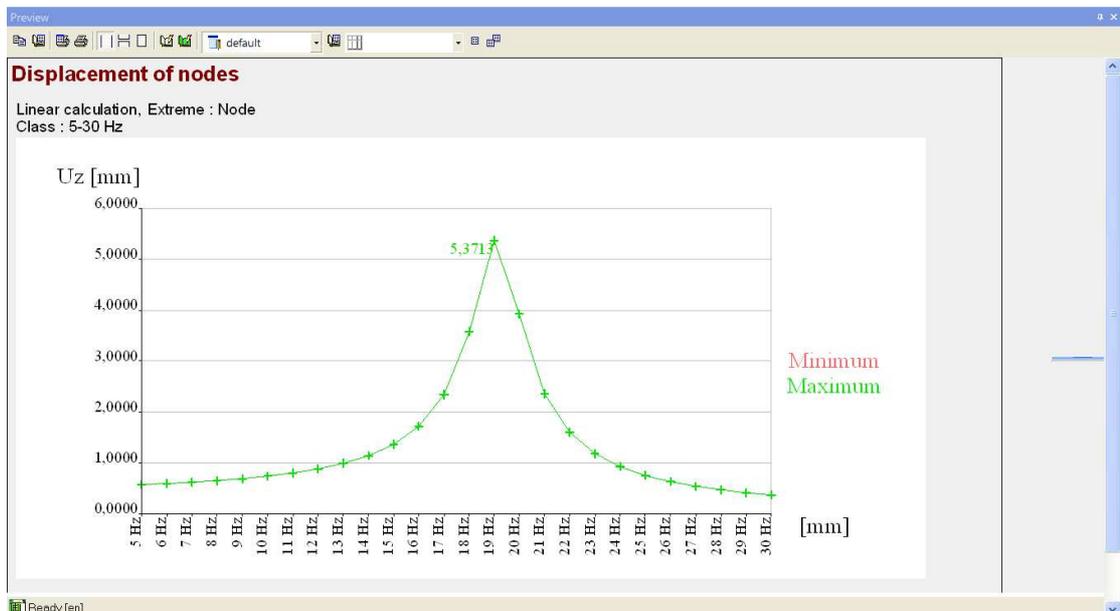
Dans le projet Forced\_Vibration 1, la fréquence d'excitation est de 5Hz. La fréquence propre est de 21.43 Hz. Nous ne sommes donc pas dans la zone de résonance.

Pour voir la réponse en fonction de la fréquence, il est possible de créer plusieurs cas de charge avec des fréquences d'excitation différentes. Vous pouvez facilement faire cela en copiant le cas de charge existant et en changeant la fréquence d'excitation. (**Exemple 5b: Forced\_Vibration\_5-30 Hz.esa**)





Ces cas de charge peuvent alors être regroupés dans une classe.  
Dans le menu des résultats, nous pouvons par exemple demander le déplacement  $U_z$  du nœud intermédiaire. En demandant le résultat pour la classe de cas de charges 5-30 Hz, nous pouvons voir clairement l'effet de résonance si la fréquence d'excitation est proche de la fréquence propre.



**Remarque :**

Dans SCIA Engineer, le décrément logarithmique est limité entre 0,0001 et 10. La limite inférieure correspond à un coefficient d'amortissement  $\approx 0,0016\%$ . Zéro amortissement est impossible, car cela conduirait à une réponse infinie (division par zéro) en résonance.

La limite supérieure correspond à un coefficient d'amortissement  $\approx 85\%$ . Pour les vibrations structurelles, c'est une valeur extrême, qui, dans presque tous les cas, ne sera jamais atteinte. L'Amortissement sera discuté plus en détail dans le Chapitre 5.

Les charges harmoniques sont couramment utilisées pour modéliser un système à piston ou un moteur. L'effet alternatif du piston et le déséquilibre de rotation du moteur produisent tous les deux une force d'excitation de type inertie sur le système. Pour un corps asymétrique de masse  $m_r$ , à un rayon effectif  $e$ , tournant à une vitesse angulaire  $v$ , la force d'excitation  $F$  peut être écrite [1]:

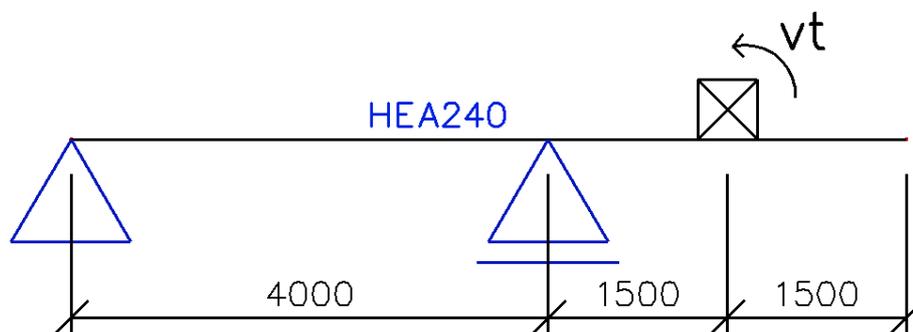
$$F = m_r \cdot e \cdot v^2 \quad (3.13)$$

Ceci est illustré dans l'exemple suivant.

**Exemple 6: Forced\_Vibration\_2.esa**

Un moteur électrique avec une masse de **500 kg** est monté sur une poutre en porte-à-faux simplement appuyée. La poutre a une section transversale de type **HEA 240** et est fabriquée en **S235** selon l'**EC-EN**. La poutre a une longueur de **4m** et le porte-à-faux est de **3m**.

Le moteur a un déséquilibre de **0,6 kgm**. Le taux d'amortissement du système est pris égal à **10%**.



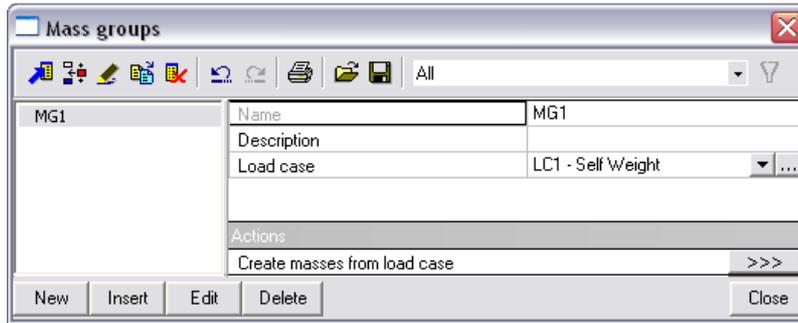
Le moteur peut fonctionner aux vitesses de **800, 1000 et 1200 tours par minute**. Pour chacune de ces vitesses, l'amplitude de vibration forcée doit être calculée afin de vérifier, par exemple, si les vibrations induites par le moteur sont acceptables.

Un cas de charge statique est créé : le **poids propre** de la poutre. Toutefois, afin de ne pas prendre le poids propre en compte pour le calcul dynamique, la masse volumique du **S235** peut être réduite à **1 kg/m<sup>3</sup>** dans la bibliothèque des **Matériaux**. Ceci rendra la vérification des résultats par un calcul manuel plus facile.

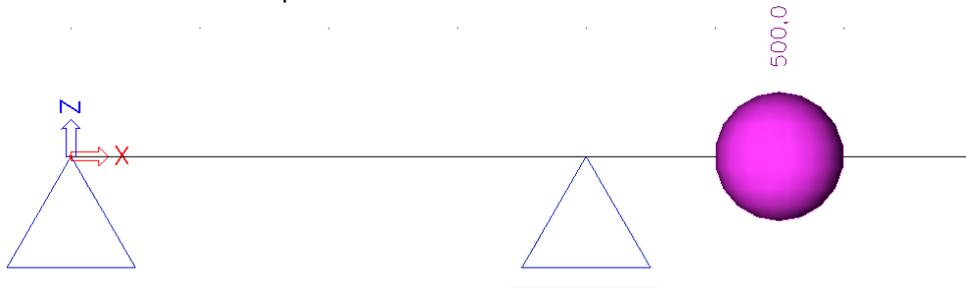
Un nœud a été ajouté au milieu du porte-à-faux pour spécifier l'emplacement du moteur.

**Etape 1 :** La première étape dans le calcul dynamique consiste à activer la **Fonctionnalité Dynamique** à partir de l'onglet fonctionnalités qui se trouve dans les **Paramètres du Projet**.

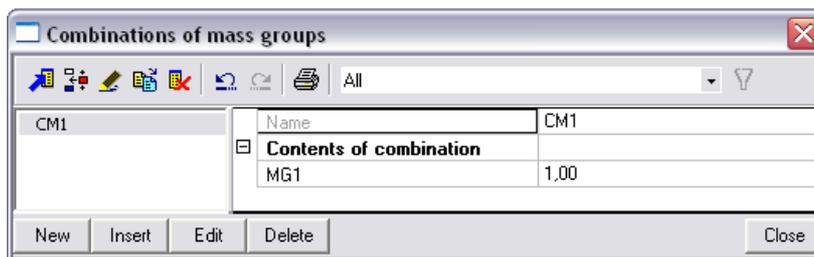
**Etape 2 :** Ensuite, il faut créer un **Groupe de Masses**.



**Etape 3 :** Après la création du Groupe de Masses, la masse du moteur de **500 kg** peut être saisie au milieu du porte-à-faux.



**Etape 4 :** Ensuite, une **Combinaison de Groupes de Masses** est créée à partir des Groupes de Masses. Celle-ci peut être utilisée pour définir les charges harmoniques avec les différentes vitesses.



**Etape 5 :** Après la création de la Combinaison de Masses, trois cas de charge **harmoniques** peuvent être définis, un pour chaque vitesse.

Chaque cas de charge utilise la même Combinaison de Masses et a les mêmes caractéristiques d'amortissement.

Le taux d'amortissement est pris égal à **10%**. En appliquant la formule (3.11) le **décroissement logarithmique** peut être calculé :

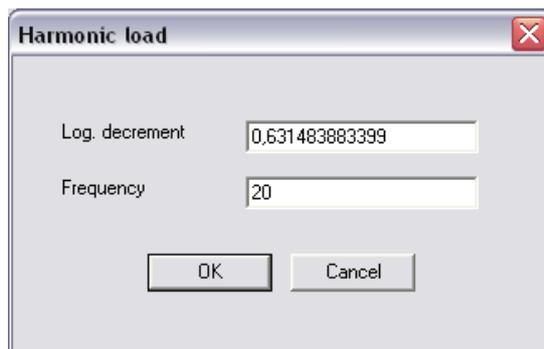
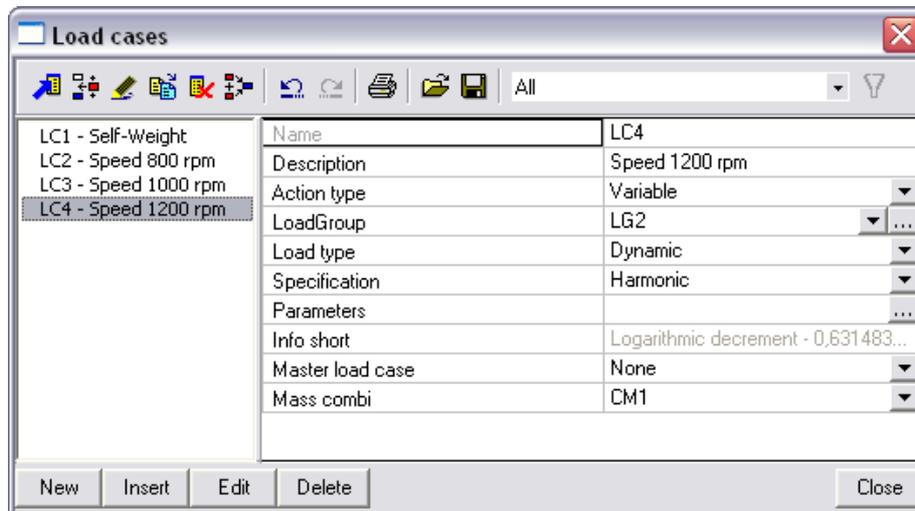
$$\Lambda = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,10}{\sqrt{1-(0,10)^2}} = 0,631483883399$$

La fréquence d'excitation est différente pour chaque cas de charge et peut être calculée à partir des vitesses :

$$v_{800} = 800 \text{ rpm} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 83,78 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow f_{800} = 13,33 \text{ Hz}$$

$$v_{1000} = 1000 \text{ rpm} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 104,72 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow f_{1000} = 16,67 \text{ Hz}$$

$$v_{1200} = 1200 \text{ rpm} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 125,66 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad f_{1200} = 20,00 \text{ Hz}$$



**Etape 6 :** Les paramètres des charges harmoniques ont été définis. Ce qui reste à faire est de saisir de l'amplitude des trois forces d'excitation.

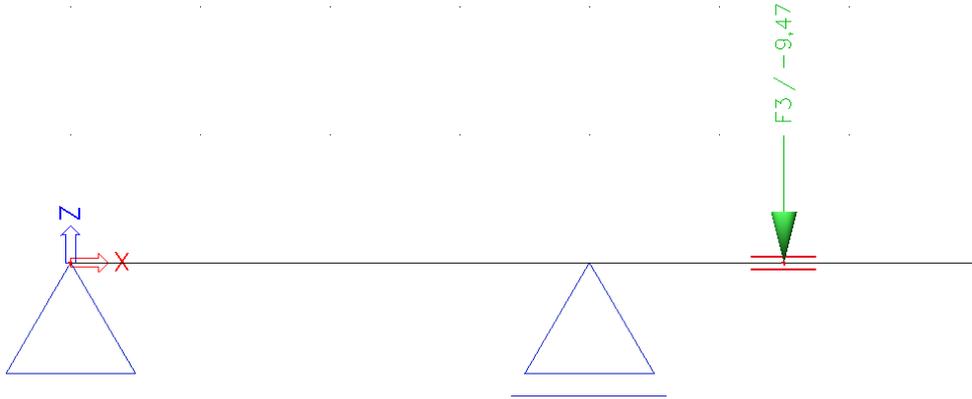
En utilisant la formule (3.13), ces forces peuvent être calculées à partir de la fréquence angulaire d'excitation et du déséquilibre de masse.

$$F_{800} = m_r \cdot e \cdot v_{800}^2 = 0,6 \text{ kgm} \cdot (83,78 \text{ rad/s})^2 = 4211,03 \text{ N} = 4,21 \text{ kN}$$

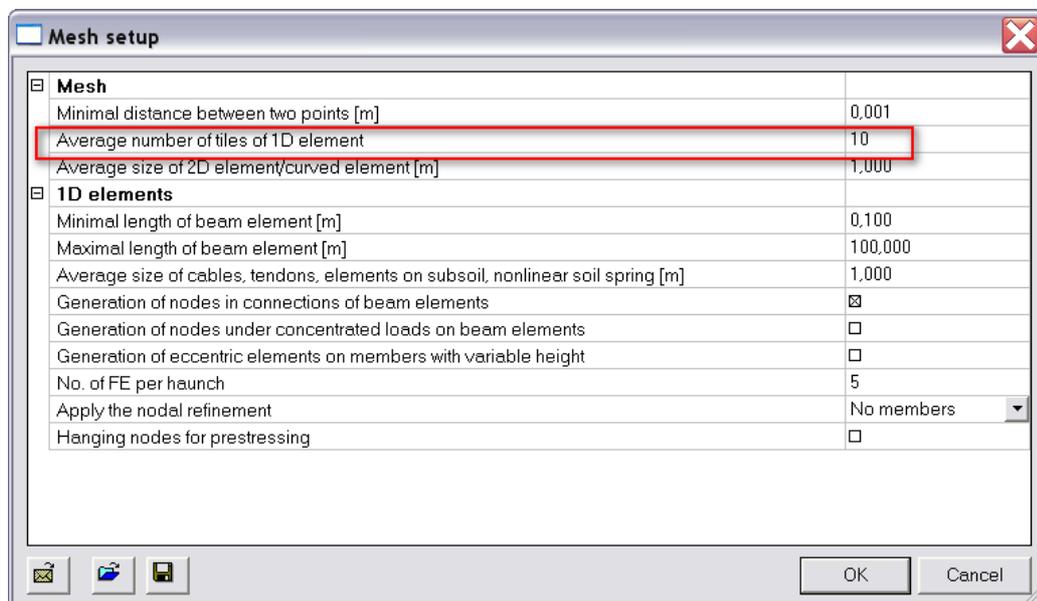
$$F_{1000} = m_r \cdot e \cdot v_{1000}^2 = 0,6 \text{ kgm} \cdot (104,72 \text{ rad/s})^2 = 6579,74 \text{ N} = 6,58 \text{ kN}$$

$$F_{1200} = m_r \cdot e \cdot v_{1200}^2 = 0,6 \text{ kgm} \cdot (125,66 \text{ rad/s})^2 = 9474,82 \text{ N} = 9,47 \text{ kN}$$

Les charges sont introduites à travers **Charges > Charge Ponctuelle > Au Nœud**

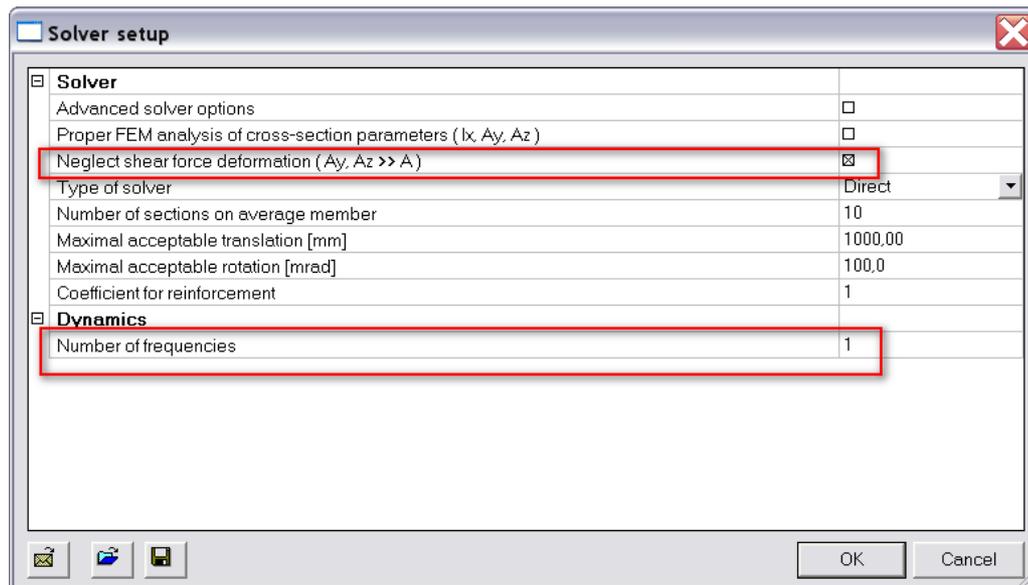


**Etape 7 :** Pour obtenir des résultats précis dans le cas du calcul dynamique, le maillage doit être raffiné. Ceci peut être réalisé avec **Calcul, Maillage > Configuration du Maillage**.



Le **Nombre moyen de division des éléments 1D** est pris égal à **10**.

**Etape 8 :** La dernière étape avant de lancer le calcul consiste à définir le nombre de modes propres à calculer. Pour cet exemple, un seul mode propre est nécessaire. Dans **Calcul, Maillage > Solveur**, le nombre de fréquences est **1**. Pour comparer les résultats avec un calcul manuel, les **déformations d'effort tranchant** sont négligées.



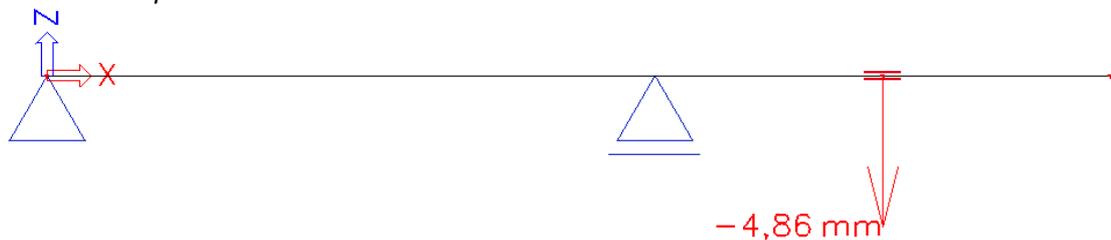
**Etape 9 :** Toutes les étapes ont été exécutées, le calcul linéaire peut donc être lancé avec **Calcul, Maillage > Calcul**.

On obtient les résultats suivants :

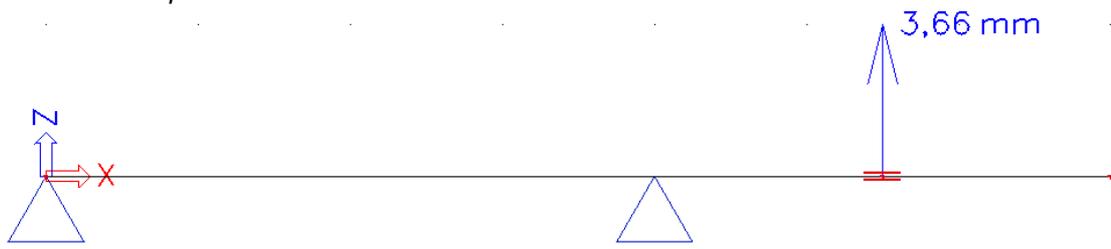
<b>Eigen frequencies</b>				
N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
<b>Mass combination : CM1</b>				
1	14,15	88,88	7899,96	0,07

Les déplacements des nœuds pour les charges harmoniques à l'emplacement du moteur sont les suivantes:

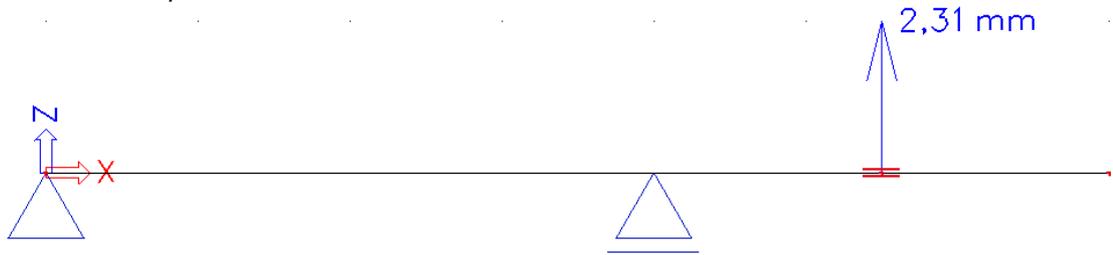
A 800 Tours par minute :



A 1000 Tours par minute :



A 1200 Tours par minute :

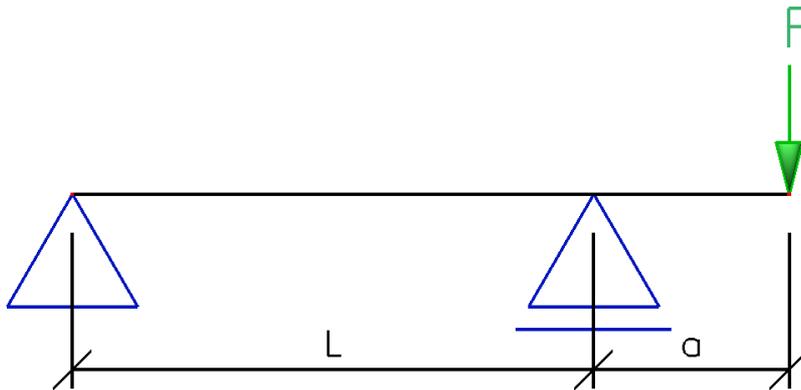


Comme indiqué dans l'exemple précédent, il est important de garder à l'esprit que les signes ne sont pas pertinents puisqu'une vibration se produit des deux côtés de la position d'équilibre.

## Calcul Manuel

In order to check the results of SCIA Engineer, a manual calculation is performed [15].  
First, the calculated eigen frequency is checked using formula (2.3)  
Using default engineering tables [11], the maximum static deformation of a simply supported beam with length  $L$ , an overhang with length  $a$  and loaded with a load  $F$  at the end of the overhang is given as:

$$\delta_{\max} = \frac{Fa^2(L+a)}{3EI} \quad (3.14)$$



The rigidity  $k$  of this system can then be calculated:

$$k = \frac{F}{\delta_{\max}} = \frac{3EI}{a^2(L+a)}$$

With:

$$\begin{aligned} L &= 4\text{m} = 4000\text{ mm} \\ a &= 1,5\text{m} = 1500\text{ mm} \\ E &= 210000\text{ N/mm}^2 \\ I &= 77600000\text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$k = \frac{3 \cdot 210000\text{ N/mm}^2 \cdot 77600000\text{ mm}^4}{(1500\text{ mm})^2 \cdot (4000\text{ mm} + 1500\text{ mm})} = 3950,55\text{ N/mm} = 3950545,45\text{ N/m}$$

Applying formula (2.3):

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3950545,45\text{ N/m}}{500\text{ kg}}} = 88,89\text{ rad/s} \\ \Rightarrow f &= \frac{\omega}{2\pi} = 14,15\text{ Hz} \end{aligned}$$

This result corresponds exactly to the result calculated by SCIA Engineer.

Applying formula (3.8) the frequency ratios can be calculated for each motor speed:

$$\begin{aligned} r_{800} &= \frac{v_{800}}{\omega} = \frac{83,78\text{ rad/s}}{88,89\text{ rad/s}} = 0,9425 \\ r_{1000} &= \frac{v_{1000}}{\omega} = \frac{104,72\text{ rad/s}}{88,89\text{ rad/s}} = 1,1781 \end{aligned}$$

$$r_{1200} = \frac{v_{1200}}{\omega} = \frac{125,66 \text{ rad/s}}{88,89 \text{ rad/s}} = 1,4137$$

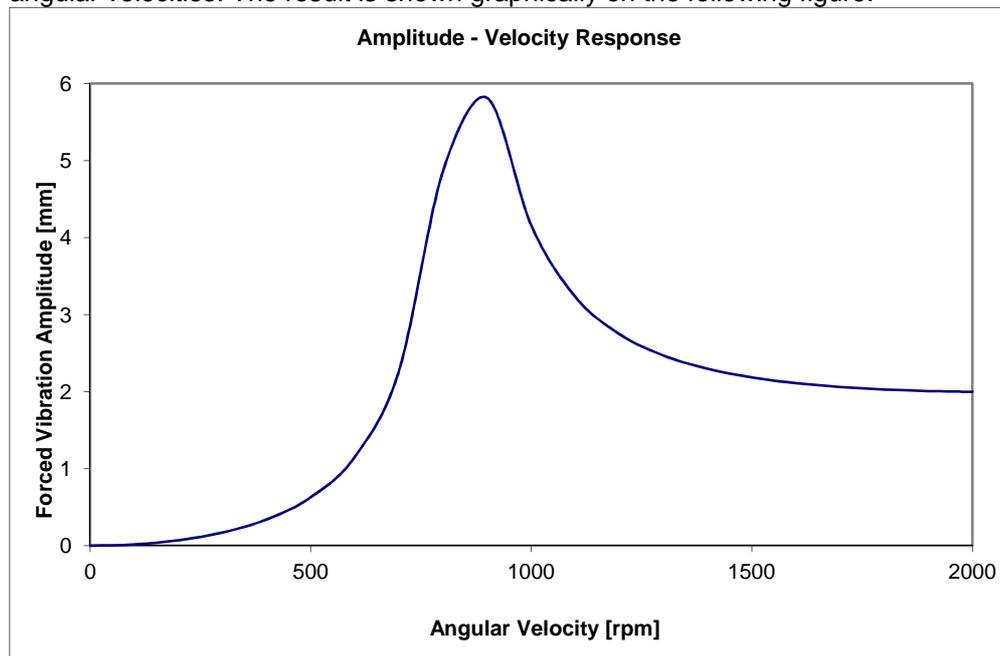
The frequency ratios can then be used in formula (3.9) to calculate the Dynamic Magnification Factors. When also applying formula (3.4) the Dynamic Amplitude can be calculated for each speed:

$$Y_{800} = \frac{F_{800}/k}{\sqrt{(1-r_{800}^2)^2 + (2r_{800}\xi)^2}} = \frac{4211,03 \text{ N/m}}{\sqrt{(1-0,9425^2)^2 + (2 \cdot 0,9425 \cdot 0,10)^2}} = 4,86 \text{ mm}$$

$$Y_{1000} = \frac{F_{1000}/k}{\sqrt{(1-r_{1000}^2)^2 + (2r_{1000}\xi)^2}} = \frac{6579,74 \text{ N/m}}{\sqrt{(1-1,1781^2)^2 + (2 \cdot 1,1781 \cdot 0,10)^2}} = 3,67 \text{ mm}$$

$$Y_{1200} = \frac{F_{1200}/k}{\sqrt{(1-r_{1200}^2)^2 + (2r_{1200}\xi)^2}} = \frac{9474,82 \text{ N/m}}{\sqrt{(1-1,4137^2)^2 + (2 \cdot 1,4137 \cdot 0,10)^2}} = 2,31 \text{ mm}$$

These results correspond exactly to the results calculated by SCIA Engineer. In the same way as in the previous Example, the calculation can be repeated for several angular velocities. The result is shown graphically on the following figure:



The main feature to notice is the decrease in vibration amplitude when the forcing frequency increases due to moving away from resonance. [15]

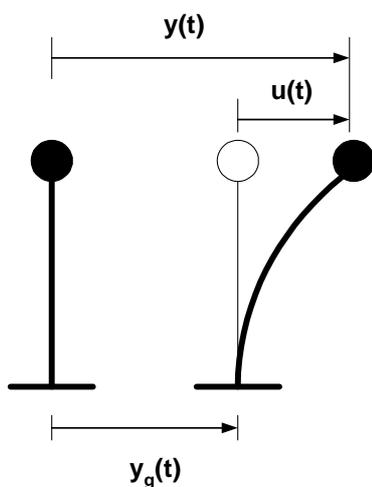
## 4. Analyse Spectrale : Charge Sismique

Dans ce chapitre, l'analyse sismique dans SCIA Engineer est expliquée en détail. Pendant un tremblement de terre, le sol qui porte la structure se déplace. La structure tente de suivre ce mouvement et, par conséquent, les masses dans la structure commencent à bouger. Par la suite, ces masses soumettent la structure à des forces d'inertie. Lorsque ces forces sont déterminées, elles peuvent être appliquées à la structure et donc, comme dans le cas du chargement harmonique, le calcul dynamique est transformé en un calcul statique équivalent. Dans la première partie du chapitre, la théorie sera exposée. Ensuite, elle sera illustrée par des exemples qui seront également vérifiés par des calculs manuels.

### 4.1 Théorie

#### Général

Comme dans les chapitres précédents, avant de considérer l'analyse dynamique d'une structure complexe, l'analyse sismique d'un système à un seul degré de liberté est exposée en détail. Un aperçu complet peut être trouvé dans les références [2], [3]. Ce paragraphe traite généralement de l'analyse des structures soumises à un mouvement harmonique du sol. Les mouvements harmoniques du sol les plus importants sont les tremblements de terre (charges sismiques), mais cette méthode de calcul peut également être appliquée à l'analyse des explosions souterraines ou de surface et des vibrations générées par un trafic lourd ou de machinerie. La figure suivante illustre le déplacement d'un système soumis à un mouvement du sol :



Où :

$y_g(t)$  : est le déplacement du sol,

$y(t)$  : est le déplacement total de la masse

$u(t)$  : est le déplacement relatif de la masse

Le déplacement total peut donc être exprimé comme suit :

$$y(t) = y_g(t) + u(t) \quad (4.1)$$

Etant donné que  $y_g$  est supposé harmonique, il peut être écrit sous la forme :

$$y_g(t) = Y_g \cdot \sin(\nu \cdot t) \quad (4.2)$$

L'équation d'équilibre du mouvement peut être écrite :

$$m \cdot \ddot{y}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0 \quad (4.3)$$

Comme la force d'inertie est liée au déplacement total (y) de la masse et l'amortissement et les réactions du ressort sont liés aux déplacements relatifs (u) de la masse.

Lorsque (4.1) est remplacé dans (4.3) on obtient :

$$m \cdot (\ddot{u}(t) + \ddot{y}_g(t)) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0;$$

où

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = -m \cdot \ddot{y}_g(t) \quad (4.4)$$

Cette équation est connue sous le nom d'**Equation Sismique Générale de Mouvement**. Cette équation peut être utilisée pour illustrer le comportement des structures qui sont soumises à une charge sismique :

En substituant (4.2) dans (4.4) on a :

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = -m \cdot Y_g \cdot v^2 \cdot \sin(v \cdot t)$$

Cette équation peut être comparée avec l'équation (3.2) du chapitre précédent. En conclusion, le mouvement du sol peut également être remplacé par une force harmonique extérieure dont l'amplitude est:

$$F = -m \cdot Y_g \cdot v^2$$

### Spectre de Réponse

Dans la plupart des cas, quand une structure doit être conçue pour résister aux tremblements de terre, l'analyse spectrale est utilisée parce que la charge sismique est souvent décrite sous forme de spectre de réponse.

Ce spectre de réponse peut être soit un spectre de déplacement, de vitesse ou d'accélération.

Le spectre de réponse (déplacement) est donné par [16] :

$$S_d(\xi, \omega) = \frac{1}{\omega} \cdot \left[ \int y_g''(\tau) \cdot e^{-\xi \cdot \omega(T-\tau)} \cdot \sin(\omega(T-\tau)) \cdot d\tau \right]_{\max} \quad (4.5)$$

Avec :  $y_g''(\tau)$  : L'accélération du sol en fonction du temps

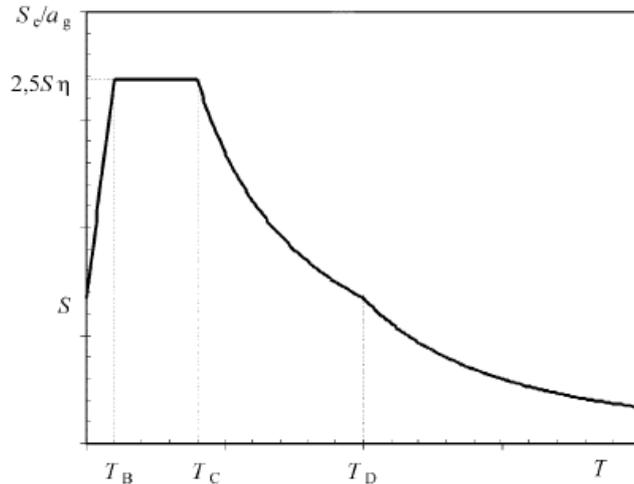
$\xi$  : Le taux d'amortissement

$T$  : La période  $2\pi/\omega$

Au lieu du spectre de déplacement  $S_d$ , le spectre de vitesse  $S_v$  ou le spectre d'accélération  $S_a$  peut être utilisé. Ces trois spectres de réponse sont liés par  $\omega$  :

$$S_a = \omega \cdot S_v = \omega^2 \cdot S_d \quad (4.6)$$

Dans l'Eurocode 8 [7] le mouvement du au tremblement de terre à un point donné sur la surface est représenté par un **spectre d'accélération du sol élastique** ou "Spectre de Réponse Elastique Se". Ce spectre est illustré dans la figure suivante:



Un moyen couramment utilisé pour décrire l'ampleur d'un séisme est l'échelle dite de Richter. L'**Annexe A** donne une relation entre l'amplitude sur l'échelle de Richter et l'accélération maximale du sol.

### Analyse spectrale

Pour un système à plusieurs degrés de liberté, l'équation (4.4) peut être écrite en notation matricielle comme un ensemble d'équations différentielles couplées :

$$M \cdot \ddot{U} + C \cdot \dot{U} + K \cdot U = -M \cdot \{1\} \cdot \ddot{Y}_g \quad (4.7)$$

La matrice  $\{1\}$  est utilisée pour indiquer la direction du tremblement de terre. Par exemple, pour une structure à deux dimensions (trois degrés de liberté) et avec un séisme qui agit dans la direction  $x$ , la matrice est une séquence de  $\{1,0,0,1,0,0,1,0,0, \dots\}$

L'ensemble d'équations différentielles couplées résultant est réduit à un ensemble d'équations différentielles découplées par le biais d'une transformation :  $U = ZQ$ , où  $Z$  est un sous-ensemble de  $\Phi$  (les vecteurs propres) et  $Q$  est un vecteur qui dépend du temps.

$$\begin{aligned} M \cdot Z \cdot \ddot{Q} + C \cdot Z \cdot \dot{Q} + K \cdot Z \cdot Q &= -M \cdot \{1\} \cdot \ddot{Y}_g; \text{ or} \\ Z^T \cdot M \cdot Z \cdot \ddot{Q} + Z^T \cdot C \cdot Z \cdot \dot{Q} + Z^T \cdot K \cdot Z \cdot Q &= -Z^T \cdot M \cdot \{1\} \cdot \ddot{Y}_g \end{aligned}$$

Le problème peut être simplifié sous forme d'équations différentielles découplées :

$$\ddot{Q} + C^* \cdot \dot{Q} + \Omega^2 \cdot Q = -Z^T \cdot M \cdot \{1\} \cdot \ddot{Y}_g \quad (4.8)$$

Où  $C^*$  est la matrice diagonale contenant des termes comme  $2\omega_i \xi_i$ .

Chaque équation  $j$  a une solution de la forme :

$$Q_j = -Z^T \cdot M \cdot \{1\} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \int_0^t Y_g(\tau) \cdot e^{-\xi \cdot \omega_j \cdot (T-\tau)} \cdot \sin(\omega_j(T-\tau)) \cdot d\tau \quad (4.9)$$

Pour obtenir les déplacements maximaux, le spectre de déplacement  $S_d$  de l'équation (4.5) peut être substitué :

$$Q_{j,\max} = -Z^T \cdot M \cdot \{1\} \cdot S_d(\xi_j, \omega_j) \quad (4.10)$$

Et :

$$\begin{aligned} U_{j,\max} &= -Z \cdot Z^T \cdot M \cdot \{1\} \cdot S_d(\xi_j, \omega_j); \text{ ou} \\ U_{j,\max} &= -Z \cdot \Psi \cdot S_d(\xi_j, \omega_j) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Où  $\Psi = Z^T \cdot M \cdot \{1\}$  est connu comme le facteur de participation modale.

## 4.2 Charge sismique dans SCIA Engineer

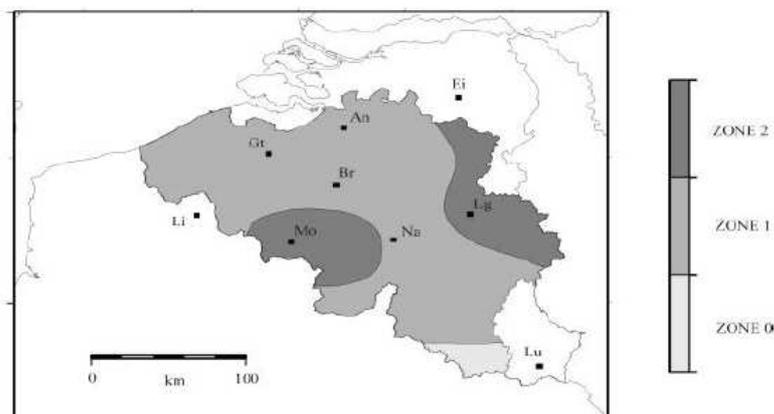
### Spectre de Réponse

Dans SCIA Engineer, une charge sismique peut être saisie après la création d'une Combinaison de Groupes de Masses. Cela implique que les étapes à suivre pour effectuer un calcul de Fréquences Propres sont valables encore ici et sont complétées par la définition des propriétés de la charge sismique.

Comme indiqué dans la théorie, l'Eurocode 8 [7] spécifie un Spectre de Réponse Élastique  $S_e$ . Pour des considérations de conception, ce spectre est réduit à un **Spectre de Dimensionnement  $S_d$** . Ce Spectre de Conception dépend de plusieurs paramètres : le **Type de Sol**, l'**Accélération du Sol**, le **Facteur de Comportement** et l'**Amortissement**.

Pour une description détaillée de ces paramètres, il est fait référence à l'Eurocode 8 [7]. Ce qui suit est un bref aperçu pour comprendre les paramètres à introduire dans SCIA Engineer.

- **Type de sol** : le type de sol dépend des caractéristiques du sol et est représenté par les lettres A à E. Par exemple, le sol de type A correspond aux formations rocheuses. B correspond au sable de grande densité, au gravier ou une argile très raide. C correspond au sable dense ou de densité moyenne, au gravier ou à une argile raide, etc.
- **Accélération du sol** : Chaque pays est divisé en zones sismiques. Par définition, le risque sismique au sein de chaque zone est supposé constant. Le danger est décrit par un seul paramètre : l'accélération maximale du sol  $a_{gR}$ . La figure suivante illustre la division en zones sismiques pour la Belgique [9] :



L'accélération du sol  $a_g$  peut être calculée à partir de  $a_{gR}$  au moyen d'un facteur d'importance. Dans la plupart des cas cependant, au lieu de se référer à  $a_g$ , le

paramètre  $\alpha$  est utilisé. Le **Coefficient d'Accélération**  $\alpha$  est défini comme étant l'accélération du sol divisée par l'accélération de la pesanteur  $g$ :

$$\alpha = \frac{a_g}{g} \quad (4.12)$$

- **Facteur de comportement** : Pour éviter une d'analyse inélastique explicite lors de la conception, la capacité de la structure à dissiper de l'énergie principalement grâce à un comportement ductile de ses éléments est pris en compte. Cela est réalisé en effectuant une analyse élastique basée sur un spectre de réponse réduit par rapport au spectre élastique. Cette réduction est effectuée en introduisant le facteur de comportement  $q$ .

- **Amortissement** : Les Spectres de Conception de l'Eurocode 8 sont définis pour un amortissement de **5%**. Si la structure a un autre taux d'amortissement, le spectre doit être corrigé avec un facteur de correction de l'amortissement  $\eta$ . Nous verrons ceci plus en détail dans le chapitre 5.

Dans SCIA Engineer, outre la saisie manuelle du spectre sismique, il est également possible d'introduire un spectre selon l'une des normes disponibles.

Ensuite, un spectre sismique est dessiné conformément aux paramètres de la norme.

The screenshot shows the 'Seismic spectrum' dialog box with the following components:

- Graph:** A plot of the seismic spectrum showing acceleration (m/sec²) on the y-axis (0.00 to 0.25) and frequency (Hz) on the x-axis (0.00 to 2.50). The curve starts at 0.25 at 0.00 Hz and decreases as frequency increases.
- Table:** A table with columns for Frequency [Hz] and corresponding values. The table is as follows:
 

	Frequency [Hz]		
1	0,00	1	
2	0,25	4	
3	0,50	2	
4	0,75	1	
5	1,00	1	
6	1,25	0	
7	1,50	0	
8	1,75	0	
9	2,00	0,50	0,13
10	2,25	0,44	0,14
11	2,50	0,40	0,16
- Code parameters sub-dialog:** A smaller dialog box with the following parameters:
 

coeff accel. ag	0,015
ag - design acceleration [m/sec...	0,150
q - behaviour factor	1,500
beta	0,200
S, Tb, Tc, Td manually?	No
Subsoil type	A
Spectrum type	type 2
Direction	Horizontal
S - soil factor	1,000
Tb	0,050
Tc	0,250
Td	1,200
- Main Dialog Controls:** 'OK' and 'Cancel' buttons at the bottom right.

### Protocole de Calcul

Dans le protocole de calcul de SCIA Engineer, vous pouvez accéder aux résultats intermédiaires qui ont été déterminés en calculant l'effet global induit par un chargement spectral.

Ce paragraphe décrit les formules qui ont été utilisées pour déterminer les résultats intermédiaires.

#### Déformée modale et fréquence angulaire naturelle

Matrice de Masse	$[M]_D$
Vecteur Masse	$\{m\} = [M]_D \cdot \{1\}$
Fréquence angulaire naturelle pour le mode j	$\omega_{(j)}$
Forme modale naturelle normalisée	$\{\phi\}_{(j)}$ , Avec $\{\phi\}_{(j)}^T \cdot [M]_D \cdot \{\phi\}_{(j)} = M_{(j)} = 1$
Masse totale dans le direction k <sup>th</sup>	$M_{k,tot}$
Spectre d'accélération	$S_{a,k,(j)}$
Direction	$k$
Nombre total de directions	$NK$

#### Facteur de participation du mode j dans la direction k

Facteur de participation	$\gamma_{k,(j)} = \frac{\{\phi_k\}^T \cdot \{m\}}{M_{(j)}} = \{\phi_k\}^T \cdot \{m\}$
Masse effective	$M_{k,ef,(j)} = \gamma_{k,(j)}^2 \cdot M_{(j)} = \gamma_{k,(j)}^2$
Masse participante	$L_{k,(j)} = \frac{M_{k,ef,(j)}}{M_{k,tot}}$

#### Coefficient de mode pour le mode j

Coefficient de mode dans la direction k	$G_{k,(j)} = \frac{S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)}}{\omega_{(j)}^2}$
Coefficient de mode total	$G_{(j)} = \frac{\sum_{k=1}^{NK} S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)}}{\omega_{(j)}^2}$

#### Réponse du mode j

Déplacement	$\{u\}_{(j)} = G_{(j)} \cdot \{\phi\}_{(j)}$ $\{u_k\}_{(j)} = G_{k,(j)} \cdot \{\phi_k\}_{(j)}$
Accélération	$\{\ddot{u}\}_{(j)} = \omega_{(j)}^2 \cdot G_{(j)} \cdot \{\phi\}_{(j)}$ $\{\ddot{u}_k\}_{(j)} = \omega_{(j)}^2 \cdot G_{k,(j)} \cdot \{\phi_k\}_{(j)} = S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)} \cdot \{\phi_k\}_{(j)}$
Force latérale au nœud i pour la	$F_{i,k,(j)} = m_{i,k,(j)} \cdot S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)}$

direction k	
Effort de cisaillement dans la direction k	$F_{k,(j)} = \sum_i F_{i,k,(j)} = \{\ddot{u}_k\}_{(j)}^T \cdot \{m\} = S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)} \cdot \{\phi_k\}_{(j)}^T \cdot \{m\}$ $F_{k,(j)} = S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)}^2$
Moment de renversement au nœud i dans la direction k	$M_{i,k,(j)} = m_{i,k} \cdot S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)} \cdot z_i$
Moment de renversement dans la direction k	$M_{k,(j)} = \sum_i M_{i,k,(j)} = \sum_i (m_{i,k} \cdot S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)} \cdot z_i)$ $M_{k,(j)} = S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)} \cdot \sum_i (m_{i,k} \cdot \phi_{i,k,(j)} \cdot z_i)$

Le calcul de ces paramètres sera illustré par un exemple plus loin dans ce chapitre.

### Méthodes de combinaison modale

Les méthodes de combinaison modale sont utilisées pour calculer la réponse  $R$  d'une analyse sismique. Le terme «réponse» ( $R$ ) se réfère aux résultats obtenus par une analyse sismique, à savoir les déplacements, vitesses, accélérations, forces et contraintes dans les éléments.

Parce que les équations différentielles ont été découplées, un résultat sera obtenu pour chaque mode  $j$ .

Pour obtenir la réponse globale  $R_{tot}$  de la structure, les réponses modales individuelles  $R_{(j)}$  doivent être combinées.

Les méthodes de combinaison modale qui sont utilisées dans SCIA Engineer sont :

#### 1. La méthode SRSS (Square Root of Sum of Squares)

$$R_{tot} = \sqrt{\sum_{j=1}^N R_{(j)}^2},$$

Avec :

$R_{(j)}$  : La réponse du mode  $j$

#### 2. La méthode CQC (Complete Quadratic Combination)

$$R_{tot} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_{(i)} \cdot \rho_{i,j} \cdot R_{(j)}},$$

Avec :

$R_{(i)}, R_{(j)}$  : La réponse du mode  $i$  et  $j$

$\rho_{i,j}$  : Coefficient de Corrélation Modale.

$$\rho_{i,j} = \frac{8\sqrt{\xi_i \xi_j} \cdot (\xi_i + r \xi_j) \cdot r^{\frac{3}{2}}}{(1-r^2)^2 + 4\xi_i \xi_j r(1+r^2) + 4(\xi_i^2 + \xi_j^2)r^2}$$

$$r = \frac{\omega_j}{\omega_i}$$

$\xi_i, \xi_j$  : Taux d'amortissement pour le mode  $i$  et  $j$ .

Cette méthode est basée sur le rapport des fréquences et sur les amortissements modaux. La méthode CQC nécessite donc la saisie de données supplémentaires : un **Spectre d'Amortissement** pour définir le taux d'amortissement pour chaque mode.

Dans de nombreux cas cependant, il n'existe aucune procédure pour calculer le taux d'amortissement pour les modes plus élevés. La plupart du temps, le même taux d'amortissement est utilisé pour tous les modes [17].

### 3. Méthode MAX

$$R_{tot} = \sqrt{R_{(j_{MAX})}^2 + \sum_{j=1}^N R_{(j)}^2},$$

Avec :

$R_{(j)}$  : La réponse du mode j

$R_{(j_{MAX})}$  : La réponse maximum de tous les modes

L'Eurocode 8 [7] recommande la **méthode SRSS**. Cependant, cette méthode ne peut être appliquée que si toutes les réponses modales pertinentes sont indépendantes les unes des autres. Ceci est vrai si la période du mode j est inférieure ou égale à **90%** de la période du mode i.

Si les réponses modales ne sont pas indépendantes les unes des autres, une méthode plus précise comme la **CQC** doit être utilisée.

L'exemple suivant montre cette différence numérique entre la méthode SRSS et CQC.

#### Exemple 7: Spectral Analysis\_1

Un immeuble symétrique de quatre étages est modélisé en 3D [18]. La structure a les fréquences naturelles suivantes pour les 5 premiers modes :

Mode 1:  $f = 13,87$  Hz

Mode 2:  $f = 13,93$  Hz

Mode 3:  $f = 43,99$  Hz

Mode 4:  $f = 44,19$  Hz

Mode 5:  $f = 54,42$  Hz

Il est clair que les modes 1 & 2 et 3 & 4 sont très rapprochés.

Pour chaque mode, en appliquant les formules de la théorie, l'Effort de Cisaillement à la Base pour une direction peut être calculé :

Mode 1:  $F = -57,53$  kN

Mode 2:  $F = 52,30$  kN

Mode 3:  $F = -9,02$  kN

Mode 4:  $F = 8,12$  kN

Mode 5:  $F = 0,33$  kN

Pour obtenir la Réponse Globale, ces réponses modales sont combinées en utilisant les deux méthodes **SRSS** et **CQC**.

Pour la **méthode CQC**, les coefficients de corrélation modales  $\rho_{i,j}$  suivants sont utilisés avec un taux d'amortissement  $\xi_{i,j}$  de **5%**.

Mode	1	2	3	4	5
1	1,000	0,998	0,006	0,006	0,004
2	0,998	1,000	0,006	0,006	0,004
3	0,006	0,006	1,000	0,998	0,180
4	0,006	0,006	0,998	1,000	0,186
5	0,004	0,004	0,180	0,186	1,000

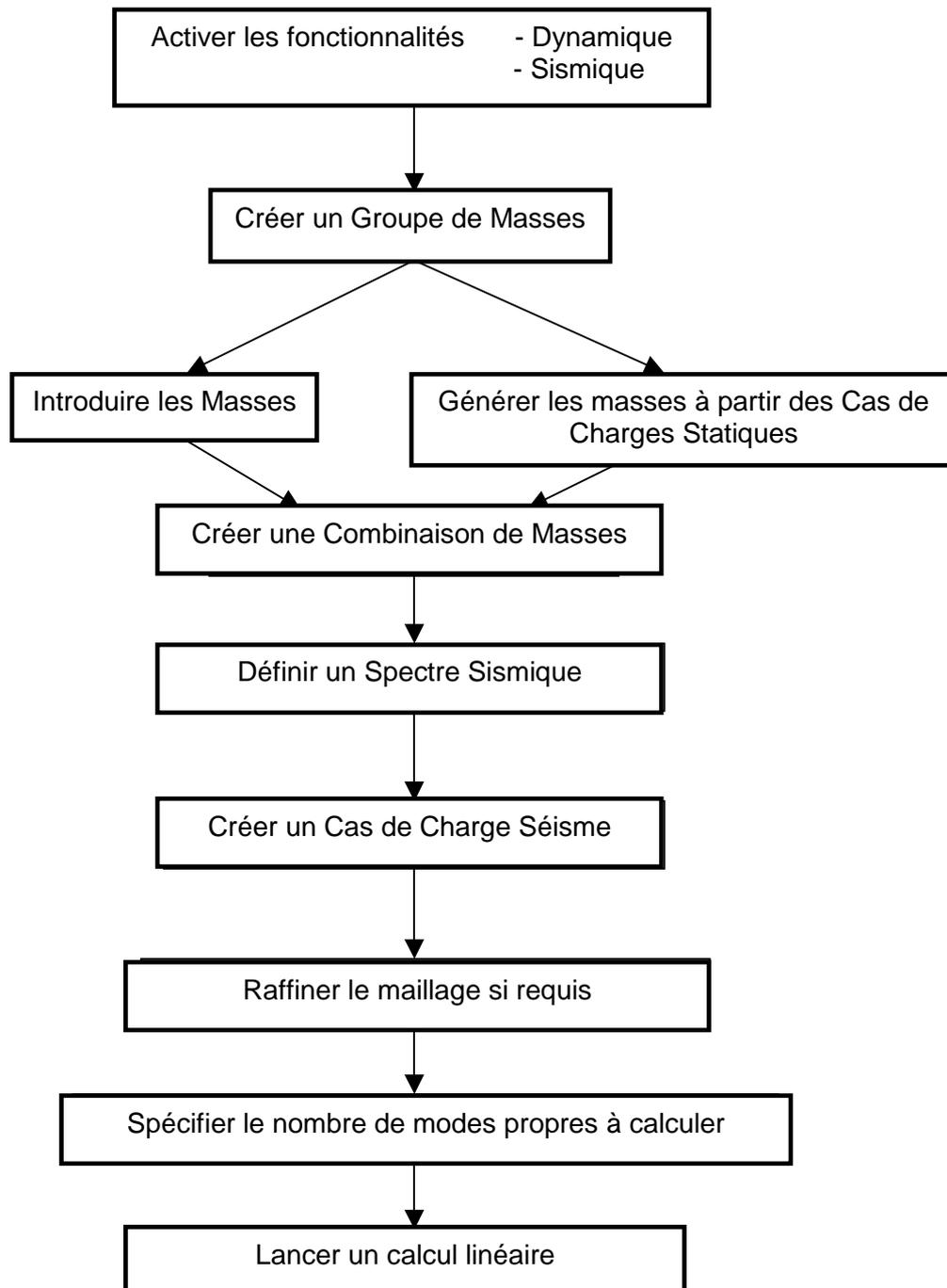
Il est important de noter l'existence des termes hors diagonale dont les valeurs sont relativement grandes. Ces termes indiquent les modes qui sont couplés.

Effort global de cisaillement à la base avec la méthode SRSS :	<b>78,69 kN</b>
Effort global de cisaillement à la base avec la méthode CQC :	<b>6,37 kN</b>
Solution exacte en utilisant l'analyse temporelle :	<b>5,44 kN</b>

Dans cet exemple, la méthode SRSS surestime le cisaillement à la base par un facteur 10.

La **méthode CQC** reconnaît le signe relatif des termes dans la réponse modale et permet d'éliminer les erreurs liées à la **méthode SRSS**.

Le schéma suivant illustre les étapes requises pour effectuer une Analyse Spectrale :

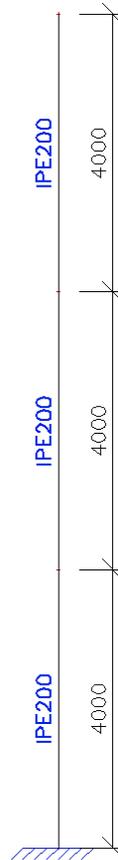


Comme spécifié dans la théorie, le calcul dynamique est transformé en un calcul statique équivalent. Par conséquent, un Calcul Linéaire doit être exécuté. Pendant ce calcul, les Fréquences Propres seront également déterminées puisque ces données sont nécessaires pour l'analyse sismique.

Le diagramme ci-dessus est illustré à travers les exemples suivants.

**Exemple 8: Spectral\_Analysis\_2.esa**

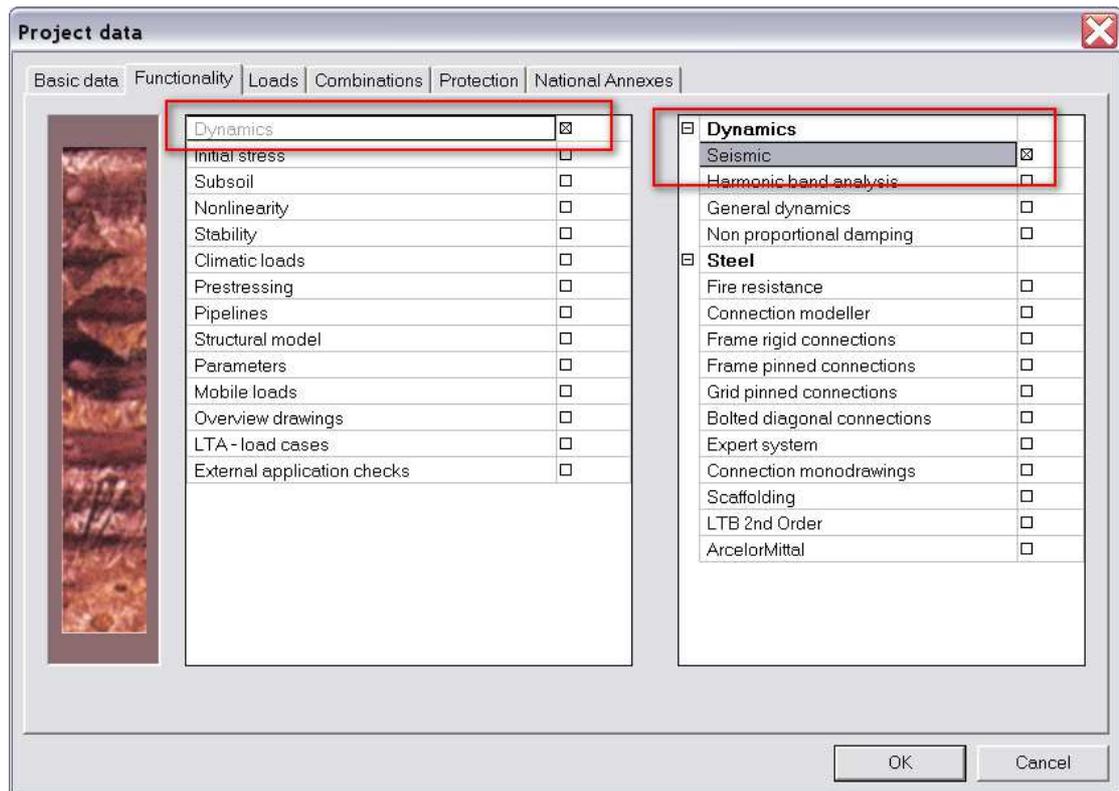
Dans cet exemple, une structure de trois étages est modélisée. Les éléments ont une section **IPE 200** et sont fabriqués en **S235** selon l'**EC-EN**. La hauteur de chaque étage est de **4m**. A chaque niveau, la structure porte une masse de **500 kg**.



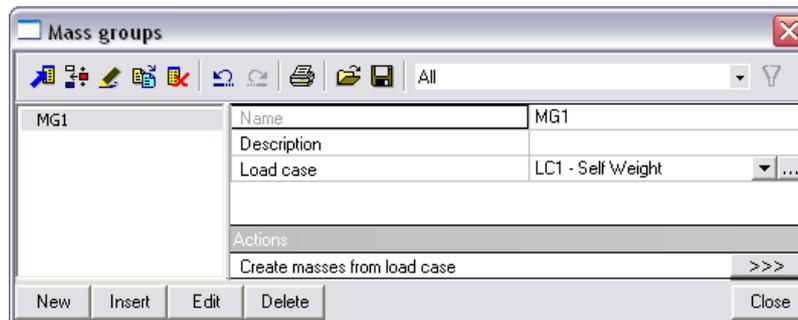
Un cas de charge statique est créé : le **poids propre** de la structure. Toutefois, afin de ne pas prendre en compte le poids propre pour le calcul dynamique, la masse volumique du **S235** peut être réduite à **1 kg/m<sup>3</sup>** dans la bibliothèque des **Matériaux**. Ceci rendra la vérification des résultats par un calcul manuel plus facile.

La structure sera soumise à un séisme conformément à l'Eurocode 8 en utilisant un Spectre de Conception pour un sol de type **B** avec un facteur de comportement de **2**. Le coefficient d'accélération est de **0,35**.

Etape 1 : La première étape dans le calcul dynamique consiste à activer la **Fonctionnalité Dynamique** à partir de l'onglet fonctionnalités qui se trouve dans les **Paramètres du Projet**. Afin de pouvoir faire un calcul Sismique, la fonctionnalité **Sismique** doit aussi être activée :



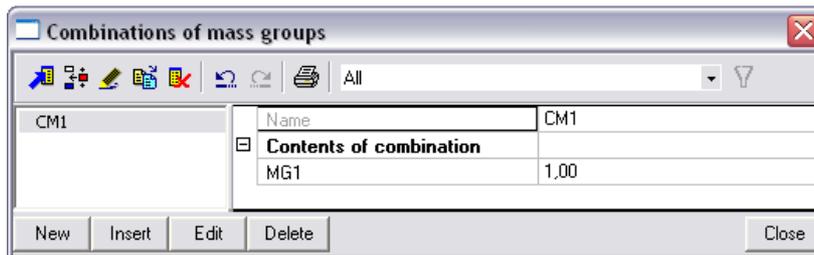
**Etape 2 :** Ensuite il faut créer un **Groupe de Masses**



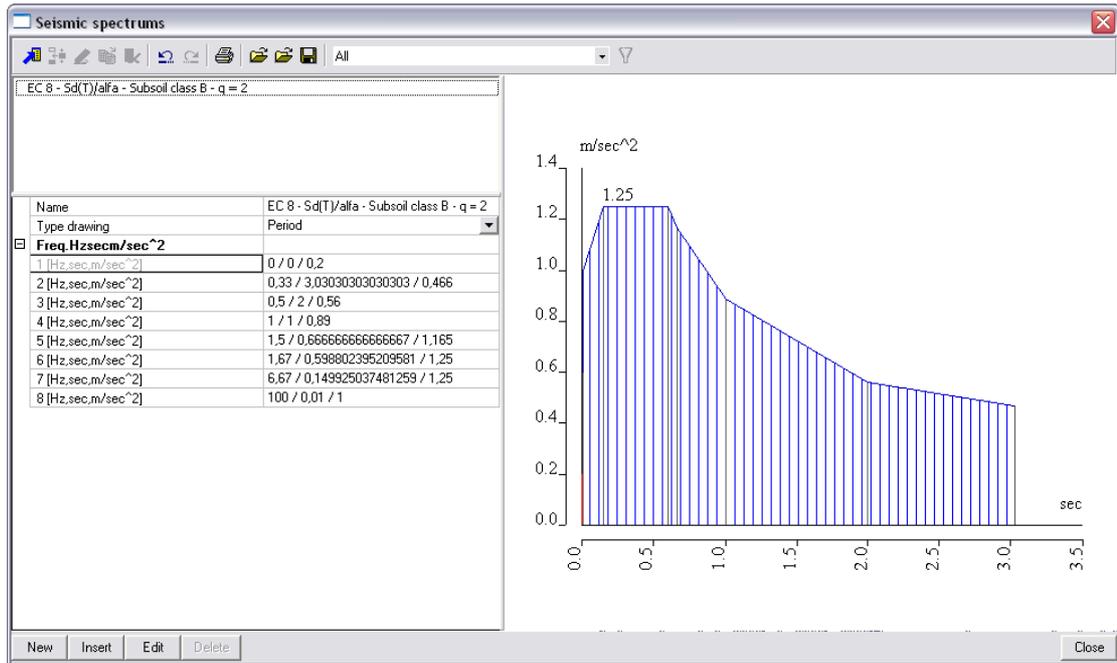
**Etape 3 :** Après la création des Groupes de Masses, les masses de **500 kg** peuvent être introduites à chaque étage.



**Etape 4 :** Les Groupes de Masses sont alors mis dans une **Combinaison de Groupes de Masses**, celle-ci sera utilisée pour définir le cas de charge Sismique.



**Etape 5 :** Avant de créer le cas de charge Sismique, le Spectre Sismique doit être défini. Cela peut être fait en allant dans **Bibliothèques > Spectres Sismiques**. Au lieu de saisir manuellement un spectre, la **Base de Données du Système** est utilisée. Elle contient le spectre Eurocode 8 prédéfini. Dans cet exemple, le spectre pour le sol de type **B** avec un facteur de comportement **q = 2** est utilisé :



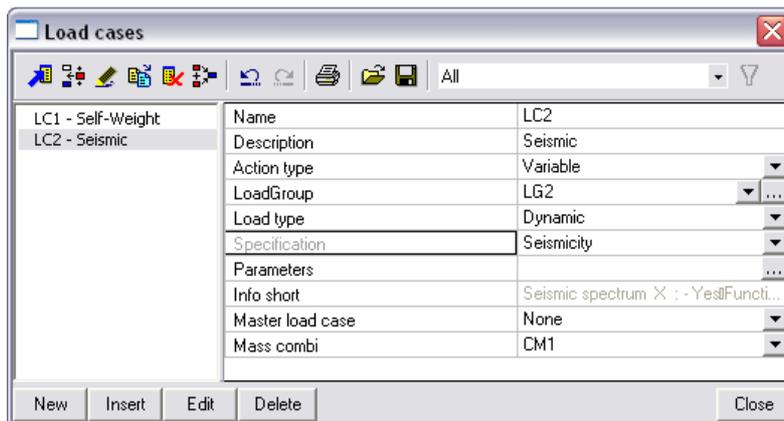
Les valeurs du spectre sont données en termes de **Sd(T)** divisé par  $\alpha$ . Le coefficient d'accélération sera définis dans le cas de charge sismique puisque le même spectre peut être utilisé pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

Etape 6 : Après avoir créé une **Combinaison de Groupes de Masses**, un cas de charge **Sismique** peut être défini dans **Cas de Charges, Combinaisons > Cas de Charges**.

Le **Type d'Action** est mis sur **Variable**

Le **Type de Charge** est changé en **Dynamique**

Dans le champ **Spécification**, le type de cas de charge dynamique est choisi. Dans ce cas, c'est un cas de charge **Sismique**.



Lorsque cette option a été sélectionnée, les paramètres de la charge sismique peuvent être saisis :

Tout d'abord, les options **Spectre Sismique X, Y, Z** peuvent être activées. Ces options permettent de spécifier quel spectre sismique doit être utilisé dans une certaine direction globale.

Dans cet exemple, le spectre est défini dans la direction horizontale X. C'est le **Spectre Sismique X** qui est donc activé et le spectre spécifié dans l'étape précédente est choisi.

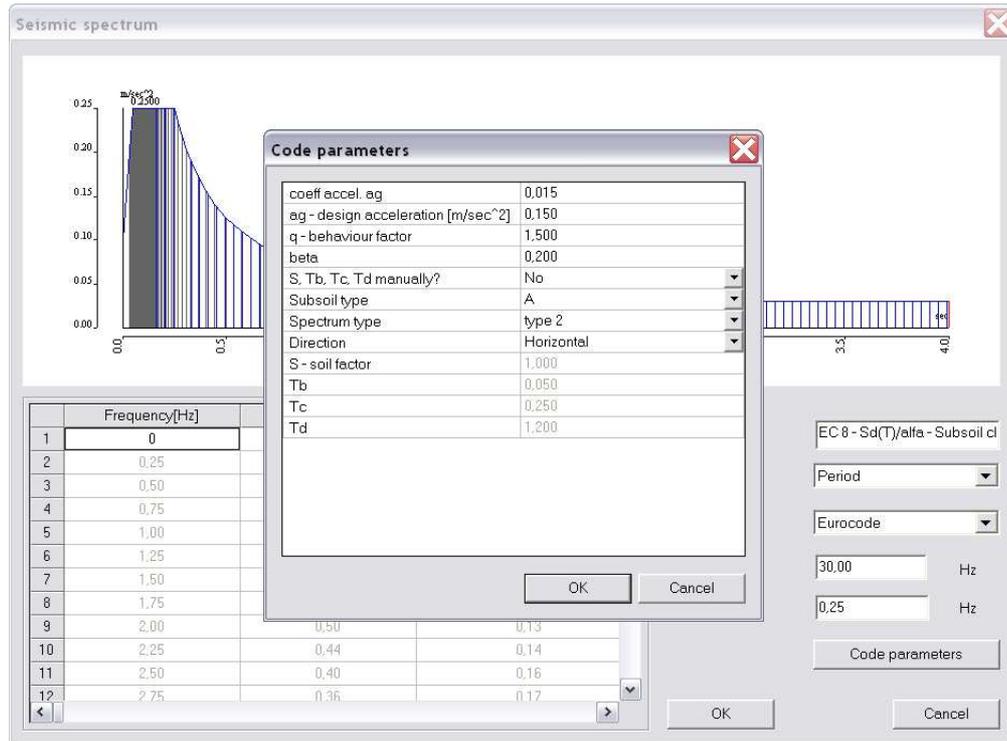
Quand aucun spectre n'a encore été défini, un nouveau spectre peut être saisi en cliquant sur 

Lorsque l'action sismique ne se produit pas selon l'une des directions globales, les coefficients de **directions X, Y, Z** peuvent être utilisés pour spécifier un vecteur.

Dans cet exemple, l'action sismique est selon la direction globale X, la **direction X** est donc prise égale à **1**.

Comme spécifié dans l'étape précédente, les valeurs des spectres sismiques sont données en termes de **Sd(T)** divisé par  $\alpha$ . Le **coefficient d'accélération** peut maintenant être saisi. Dans cet exemple, la valeur de  $\alpha$  est **0,35**.

Remarque : lorsqu'un spectre sismique selon la norme est choisi, la valeur de  $\alpha$  est **1**. Dans ce cas, le coefficient d'accélération est introduit spécifiquement pour chaque norme dans la boîte de dialogue des paramètres :



Le paramètre **Renversement** est utilisé lorsque les appuis de la structure sont au-dessus du niveau du sol. Par défaut, cette valeur est égale à **0**.

Dans la zone **Type d'évaluation**, la **Méthode de Combinaison Modale** peut être choisie. Comme spécifié dans la théorie, pour la **méthode CQC** un spectre d'amortissement supplémentaire doit être défini. Ceci sera illustré dans l'exemple qui suit.

Pour cet exemple, la méthode par défaut **SRSS** sera appliquée.

En raison de l'utilisation de la racine carrée dans les formules des méthodes de combinaison modale, les résultats sont toujours positifs. Pour utiliser ces résultats dans une analyse précise de la structure, l'option **résultats signés** peut être utilisée. Lorsque cette propriété est cochée, l'utilisateur peut sélectionner la forme modale qui sera utilisée pour définir le signe.

Si le défaut est choisi, la forme modale avec la plus grande participation de masse est utilisée (somme des directions X, Y et Z). Cette option peut être utilisée pour des murs de cisaillement par exemple.

L'option **modes propres multiples** peut être utilisée dans le cas de la méthode SRSS. La formule classique suivante est utilisée pour la SRSS :

$$R = \sqrt{R_{(1)}^2 + R_{(2)}^2 + R_{(3)}^2 + R_{(4)}^2 + R_{(5)}^2 + \dots}$$

Si l'option modes propres multiples est cochée, la condition suivante est vérifiée :

$$1 - \frac{\omega_{(i)}}{\omega_{(j)}} \leq \text{precision, where } i < j; \omega_{(i)} \leq \omega_{(j)}$$

Les modes (i) et (j) sont multiples. Donc par exemple :

$$R = \sqrt{R_{(1)}^2 + (R_{(2)} + R_{(3)})^2 + R_{(4)}^2 + R_{(5)}^2 + \dots}$$

Lorsque le calcul dynamique est effectué, l'utilisateur doit vérifier si la règle des 90% est satisfaite. Pour cela, vous pouvez aller dans le protocole de calcul et afficher les facteurs de participation modaux. Si la masse en vibration est inférieure à 90%, le nombre de fréquences propres calculées doit être augmenté.

Pour éviter cette vérification, il est possible d'activer l'option **masse manquante dans les modes** ou **mode résiduel**. Voir plus loin pour les explications.

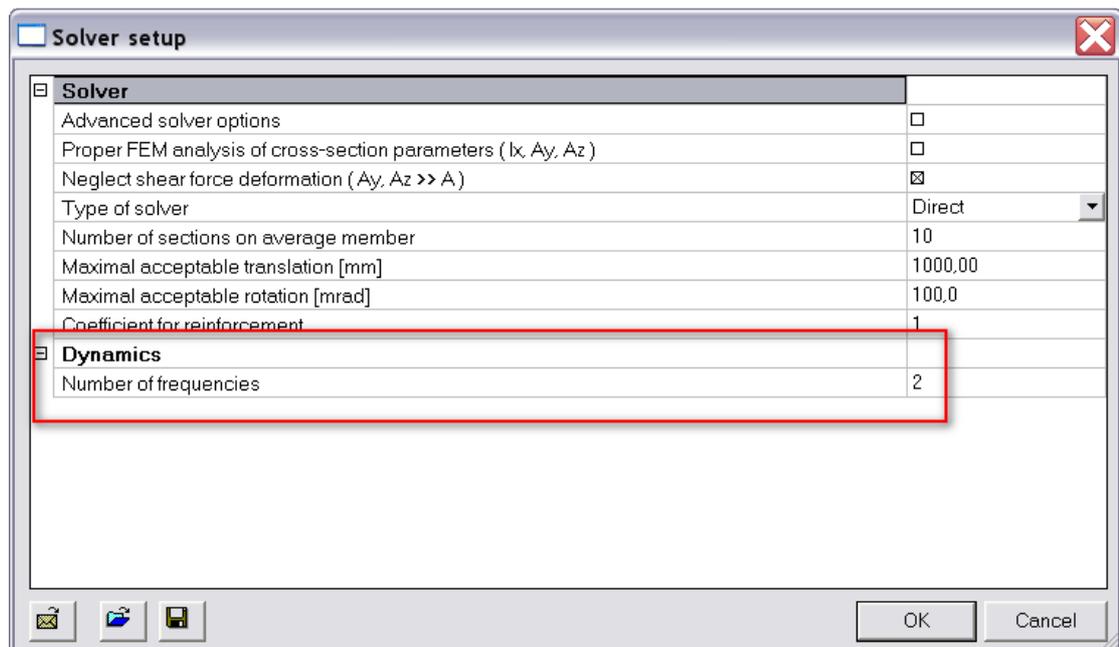
**Remarque :**

*Les options sous modes propres multiples peuvent être utilisées pour éviter les erreurs induites par la méthode SRSS pour les modes rapprochés. Comme spécifié dans la théorie cependant, il est conseillé d'utiliser la méthode CQC dans de tels cas.*

**Etape 7 :** Comme indiqué dans les chapitres précédents, le maillage doit être raffiné pour obtenir des résultats précis. Cela peut être réalisé avec **Calcul, Maillage > Configuration du Maillage**.

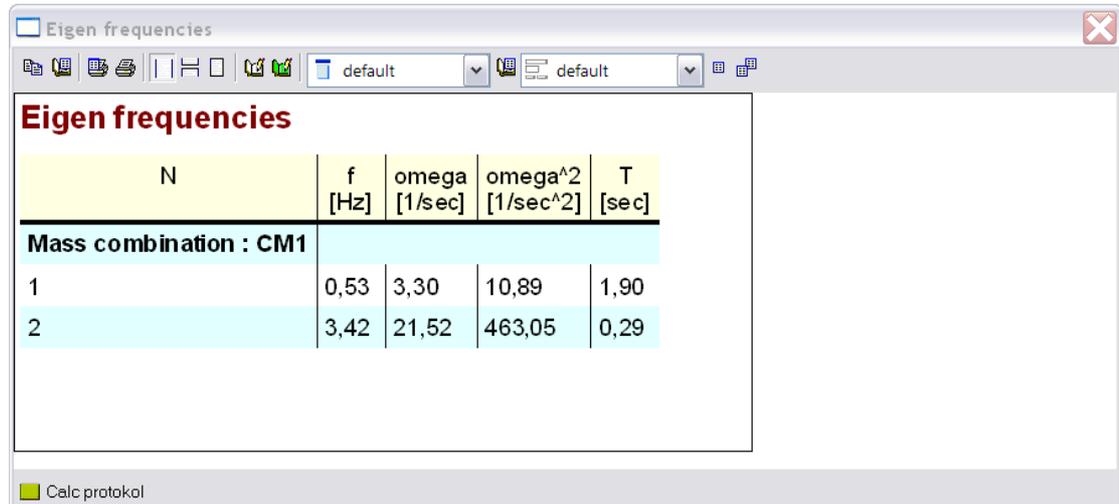
Pour cet exemple, le maillage par défaut sera utilisé pour que la comparaison avec les calculs manuels soit plus facile.

**Etape 8 :** La dernière étape avant de lancer le calcul consiste à définir le nombre de modes propres à calculer. Pour cet exemple, deux modes propres sont choisis. Dans **Calcul, Maillage > Solveur**, le nombre de fréquences est **2**.



**Etape 9 :** Toutes les étapes ont été exécutées, le calcul linéaire peut donc être lancé avec **Calcul, Maillage > Calcul**.

Les résultats suivants sont obtenus :



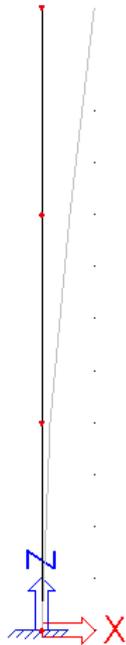
The screenshot shows a software window titled 'Eigen frequencies'. It contains a table with the following data:

N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
<b>Mass combination : CM1</b>				
1	0,53	3,30	10,89	1,90
2	3,42	21,52	463,05	0,29

At the bottom of the window, there is a checkbox labeled 'Calc protokol' which is currently unchecked.

En utilisant le **Déplacement des Nœuds**, la **Déformée de la Structure** peut être affichée pour voir les modes propres :

*Mode propre 1 :*

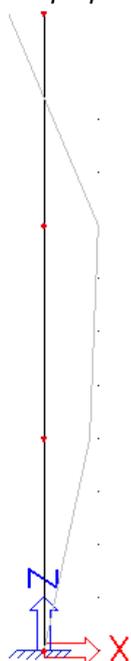


### Deformation of nodes

Eigen solution, Extreme : No  
 Selection : All  
 Mass combinations : CM1/1 - 0,53  
 Values are multiplied by 10000 for better numeric representation.

Node	Case	Ux []	Uz []	Fiy []
N1	CM1/1 - 0,53	0,00	0,00	0,00
N2	CM1/1 - 0,53	61,28	0,00	28,21
N3	CM1/1 - 0,53	208,03	0,00	42,96
N4	CM1/1 - 0,53	391,11	0,00	47,14

Mode propre 2 :



### Deformation of nodes

Eigen solution, Extreme : No  
 Selection : All  
 Mass combinations : CM1/2 - 3,42  
 Values are multiplied by 10000 for better numeric representation.

Node	Case	Ux []	Uz []	Fiy []
N1	CM1/2 - 3,42	0,00	0,00	0,00
N2	CM1/2 - 3,42	257,55	0,00	72,39
N3	CM1/2 - 3,42	304,51	0,00	-64,93
N4	CM1/2 - 3,42	-202,33	0,00	-156,78

Le **Protocole de Calcul** pour le calcul des **Fréquences Propres** donne :

Modal participation factors							
Number	Omega	Period	Freq. [Hz]	Damp ratio	Wxi / Wxtot	Wyi / Wytot	Wzi / Wztot
1	3.3007	1.9036	0.5253	0.0000	0.7269	0.0000	0.0000
2	21.5192	0.2920	3.4249	0.0000	0.2157	0.0000	0.0000
					0.9426	0.0000	0.0000

Comme spécifié dans le premier exemple de ce cours, les **Facteurs de Participation Modale** montrent la quantité de masse qui vibre pour un mode propre spécifique en tant que pourcentage de la masse totale.

Pour le premier mode propre, il y a **73%** de la masse totale qui vibre. Pour le deuxième mode propre, il y en a **22%**. Au total, ces deux modes propres représentent environ **94%** de la masse totale.

Selon l'Eurocode 8 [7] la somme des masses modales effective pour les modes pris en compte doit s'élever à au moins **90%** de la masse totale de la structure. Ce critère est rempli, ce qui indique que deux modes propres sont suffisants pour cet exemple.

Les détails du calcul sismique peuvent être trouvés dans le **Protocole de Calcul** pour le **Calcul Linéaire** :

Dynamic loadcase: 2											
Number	Freq. [Hz]	Damp ratio	Damp coef.	Sax [m/s <sup>2</sup> ]	Say [m/s <sup>2</sup> ]	Saz [m/s <sup>2</sup> ]	G(j)	Fx [kN]	Fy [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]
1	0.5253	0.0000	1.0000	0.2019	0.0000	0.0000	0.6119	0.2201	0.0000	0.0000	-2.2008
2	3.4249	0.0000	1.0000	0.4380	0.0000	0.0000	0.0170	0.1417	0.0000	0.0000	-0.4090
Level=	0.00							0.26	0.00	0.00	2.24

Le **Taux d'amortissement** représente la valeur d'amortissement qui a été saisie manuellement pour chaque mode propre.

Il est important de garder à l'esprit que les spectres sismiques de l'Eurocode 8 ont été calculés avec un taux d'amortissement de **5%** comme indiqué dans la théorie. Quand un taux d'amortissement est saisi manuellement, les spectres doivent être corrigés. Ceci est fait à l'aide du **Coefficient d'Amortissement**.

L'amortissement et le **Coefficient d'Amortissement** seront discutés en détail dans le chapitre 5 et dans l'exemple suivant.

**Sax**, **Say** et **Saz** représentent les accélérations spectrales.

**G(j)** est le coefficient de mode pour le mode j.

**Fx** et **Fy** sont les tranchants à la base pour chaque mode.

**Mx** et **My** sont les Moments de Renversement pour chaque mode.

La dernière ligne du tableau indique la réponse globale. Cette réponse a été obtenue au moyen de la méthode SRSS qui a servi à combiner les réponses modales.

Les formules qui permettent de calculer ces paramètres ont été présentées dans la théorie et vont maintenant être illustrées au moyen d'un calcul manuel.

## Calcul Manuel

In this paragraph, the seismic results of SCIA Engineer are calculated manually to give a clear understanding of the applied formulas. All formulas can be found in the paragraph "*Calculation Protocol*" of this chapter.

First, the **Modal Participation Factors** of the **Eigen Frequency Calculation Protocol** are verified.

As shown in the Deformation of Nodes, the normalised modal shapes for both modes were the following:

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 0,039111 \\ 0,020803 \\ 0,006128 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} -0,020233 \\ 0,030451 \\ 0,025755 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Participation factor:  $\gamma_{k,(j)} = \{\phi_k\}^T \cdot \{m\}$

$$\Rightarrow \gamma_{x,(1)} = 0,039111 \cdot 500 + 0,020803 \cdot 500 + 0,006128 \cdot 500 = 33,021$$

$$\Rightarrow \gamma_{x,(2)} = -0,020233 \cdot 500 + 0,030451 \cdot 500 + 0,025755 \cdot 500 = 17,984$$

Effective mass:  $M_{k,ef,(j)} = \gamma_{k,(j)}^2$

$$\Rightarrow M_{x,ef,(1)} = (33,021)^2 = 1090,39$$

$$\Rightarrow M_{x,ef,(2)} = (17,984)^2 = 323,42$$

$$\text{Participation mass ratio: } L_{k,(j)} = \frac{M_{k,ef,(j)}}{M_{k,tot}}$$

$$\Rightarrow L_{x,(1)} = \frac{1090,39}{500 + 500 + 500} = \mathbf{0,7269}$$

$$\Rightarrow L_{x,(2)} = \frac{323,42}{500 + 500 + 500} = \mathbf{0,2156}$$

These results correspond to the results obtained by SCIA Engineer

Next, the details of the seismic calculation found in the **Calculation Protocol** for the **Linear Calculation** are verified.

Number	Freq. [Hz]	Damp ratio	Damp coef.	Sax [m/s <sup>2</sup> ]	Say [m/s <sup>2</sup> ]	Saz [m/s <sup>2</sup> ]	G(j)	Fx [kN]	Fy [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]
1	0.5253	0.0000	1.0000	0.2019	0.0000	0.0000	0.6119	0.2201	0.0000	0.0000	-2.2008
2	3.4249	0.0000	1.0000	0.4380	0.0000	0.0000	0.0170	0.1417	0.0000	0.0000	-0.4090
Level=	0.00							0.26	0.00	0.00	2.24

The spectral acceleration **Sax** for both modes is calculated using the defined seismic spectrum.

The spectrum for Ground Type **B** with a Behaviour Factor **q = 2** gives the following values for **Sd(T)/α**

Freq./Period/Accel. [Hz.sec]
0,00/0,00/0,200
0,33/3,03/0,466
0,50/2,00/0,560
1,00/1,00/0,890
1,50/0,67/1,165
1,67/0,60/1,250
6,67/0,15/1,250
100,00/0,01/1,000

The first mode has a period **T<sub>1</sub>** of **1,9036 s** ⇒ Sd(T<sub>1</sub>)/α = 0,5918 m/s<sup>2</sup>

The second mode has a period **T<sub>2</sub>** of **0,2920 s** ⇒ Sd(T<sub>2</sub>)/α = 1,25 m/s<sup>2</sup>

In this Example, the coefficient of acceleration α was **0,35**

$$\Rightarrow S_{ax,(1)} = 0,5918 \frac{m}{s^2} \cdot 0,35 = 0,2071 \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow S_{ax,(2)} = 1,25 \frac{m}{s^2} \cdot 0,35 = 0,4375 \frac{m}{s^2}$$

These results correspond to the results obtained by SCIA Engineer. The small deviation is due to the fact that SCIA Engineer uses more decimals. In the further analysis, the spectral accelerations of SCIA Engineer are used.

Mode coefficient:

$$G_{k,(j)} = \frac{S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)}}{\omega_{(j)}^2}$$

$$\Rightarrow G_{x,(1)} = \frac{0,2019 \cdot 33,021}{(3,3007)^2} = 0,6119$$

$$\Rightarrow G_{x,(2)} = \frac{0,4380 \cdot 17,984}{(21,5192)^2} = 0,0170$$

These results correspond to the results obtained by SCIA Engineer. The necessary intermediate results are calculated so the response of each mode can now be obtained.

First, for each mode, the lateral force in each node can be calculated. These lateral forces can then be used to calculate the base shear and overturning moment.

Mode 1:

Lateral force in node i:  $F_{i,k,(j)} = m_{i,k,(j)} \cdot S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)}$

$$F_{4,x,(1)} = 500 \text{ kg} \cdot 0,2019 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 33,021 \cdot 0,039111 = 130,38 \text{ N}$$

$$F_{3,x,(1)} = 500 \text{ kg} \cdot 0,2019 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 33,021 \cdot 0,020803 = 69,35 \text{ N}$$

$$F_{2,x,(1)} = 500 \text{ kg} \cdot 0,2019 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 33,021 \cdot 0,006128 = 20,43 \text{ N}$$

$$F_{1,x,(1)} = 0 \text{ N}$$

Base Shear Force:  $F_{k,(j)} = \sum_i F_{i,k,(j)}$

$$\Rightarrow F_{x,(1)} = 130,38 \text{ N} + 69,35 \text{ N} + 20,43 \text{ N} = 220,129 \text{ N} = \mathbf{0,2201 \text{ kN}}$$

Overturning moment in node i:  $M_{i,k,(j)} = F_{i,k,(j)} \cdot z_i$

$$M_{4,y,(1)} = -130,38 \text{ N} \cdot 12 \text{ m} = -1564,50 \text{ Nm}$$

$$M_{3,y,(1)} = -69,35 \text{ N} \cdot 8 \text{ m} = -554,77 \text{ Nm}$$

$$M_{2,y,(1)} = -20,43 \text{ N} \cdot 4 \text{ m} = -81,71 \text{ Nm}$$

$$M_{1,y,(1)} = 0 \text{ Nm}$$

Overturning Moment:  $M_{k,(j)} = \sum_i M_{i,k,(j)}$

$$\Rightarrow M_{y,(1)} = -1564,50 \text{ Nm} - 554,77 \text{ Nm} - 81,71 \text{ Nm} = -2200,89 \text{ Nm} = \mathbf{-2,2009 \text{ kNm}}$$

Note:

---

*In this mode, all lateral forces in the nodes are oriented the same way. The lateral loads in the nodes are in this case oriented in the negative X-direction so the Base Shear Force is oriented in the positive X-direction. The lateral loads in the nodes thus produce a negative Overturning Moment around the Y-axis. An Example of this principle can be found in reference [26].*

*However, as stated in the previous chapters, the signs have no absolute importance since vibration amplitudes always occurs on both sides of the equilibrium position.*

---

Mode 2:

Lateral force in node i:  $F_{i,k,(j)} = m_{i,k,(j)} \cdot S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)}$

$$F_{4,x,(2)} = 500 \text{ kg} \cdot 0,4380 \text{ m/s}^2 \cdot 17,984 \cdot -0,020233 = -79,69 \text{ N}$$

$$F_{3,x,(2)} = 500 \text{ kg} \cdot 0,4380 \text{ m/s}^2 \cdot 17,984 \cdot 0,030451 = 119,93 \text{ N}$$

$$F_{2,x,(2)} = 500 \text{ kg} \cdot 0,4380 \text{ m/s}^2 \cdot 17,984 \cdot 0,025755 = 101,44 \text{ N}$$

$$F_{1,x,(2)} = 0 \text{ N}$$

Base Shear Force:  $F_{k,(j)} = \sum_i F_{i,k,(j)}$

$$\Rightarrow F_{x,(2)} = -79,69 \text{ N} + 119,93 \text{ N} + 101,44 \text{ N} = 141,68 \text{ N} = \mathbf{0,1417 \text{ kN}}$$

Overtopping moment in node i:  $M_{i,k,(j)} = F_{i,k,(j)} \cdot z_i$

$$M_{4,y,(2)} = 79,69 \text{ N} \cdot 12 \text{ m} = 956,25 \text{ Nm}$$

$$M_{3,y,(2)} = -119,93 \text{ N} \cdot 8 \text{ m} = -959,45 \text{ Nm}$$

$$M_{2,y,(2)} = -101,44 \text{ N} \cdot 4 \text{ m} = -405,74 \text{ Nm}$$

$$M_{1,y,(2)} = 0 \text{ Nm}$$

Overtopping Moment:  $M_{k,(j)} = \sum_i M_{i,k,(j)}$

$$\Rightarrow M_{y,(2)} = 956,25 \text{ Nm} - 959,45 \text{ Nm} - 405,74 \text{ Nm} = -408,94 \text{ Nm} = \mathbf{-0,4089 \text{ kNm}}$$

To obtain the global response, the modal responses need to be combined. In this Example the **SRSS-method** was used:

$$F_x = \sqrt{(F_{x,(1)})^2 + (F_{x,(2)})^2} = \sqrt{(0,2201 \text{ kN})^2 + (0,1417 \text{ kN})^2} = \mathbf{0,2618 \text{ kN}}$$

$$M_y = \sqrt{(M_{y,(1)})^2 + (M_{y,(2)})^2} = \sqrt{(-2,2009 \text{ kNm})^2 + (-0,4089 \text{ kNm})^2} = \mathbf{2,238 \text{ kNm}}$$

These results correspond exactly to the results obtained by SCIA Engineer.

As specified in the theory, these same principles can now be used to calculate the displacements and accelerations for each mode. These modal responses can then be combined again to obtain the global displacements and accelerations of the structure.

#### Mode 1:

Displacement in node i:  $u_{i,k,(j)} = G_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)}$

$$u_{4,x,(1)} = 0,6119 \cdot 0,039111 = 0,02393 \text{ m} = \mathbf{23,93 \text{ mm}}$$

$$u_{3,x,(1)} = 0,6119 \cdot 0,020803 = 0,01273 \text{ m} = \mathbf{12,73 \text{ mm}}$$

$$u_{2,x,(1)} = 0,6119 \cdot 0,006128 = 0,00375 \text{ m} = \mathbf{3,75 \text{ mm}}$$

$$u_{1,x,(1)} = \mathbf{0 \text{ mm}}$$

Acceleration in node i:  $\ddot{u}_{i,k,(j)} = \omega_j^2 \cdot G_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)}$

$$a_{4,x,(1)} = (3,3007)^2 \cdot 0,6119 \cdot 0,039111 = 0,26073 \text{ m/s}^2 = \mathbf{260,73 \text{ mm/s}^2}$$

$$a_{3,x,(1)} = (3,3007)^2 \cdot 0,6119 \cdot 0,020803 = 0,13868 \text{ m/s}^2 = \mathbf{138,68 \text{ mm/s}^2}$$

$$a_{2,x,(1)} = (3,3007)^2 \cdot 0,6119 \cdot 0,006128 = 0,04085 \frac{m}{s^2} = \mathbf{40,85 \text{ mm/s}^2}$$

$$a_{1,x,(1)} = \mathbf{0 \text{ mm/s}^2}$$

**Mode 2:**

Displacement in node i:  $u_{i,k,(j)} = G_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)}$

$$u_{4,x,(2)} = 0,0170 \cdot (-0,020233) = -0,00034 \text{ m} = \mathbf{-0,34 \text{ mm}}$$

$$u_{3,x,(2)} = 0,0170 \cdot 0,030451 = 0,00052 \text{ m} = \mathbf{0,52 \text{ mm}}$$

$$u_{2,x,(2)} = 0,0170 \cdot 0,025755 = 0,00044 \text{ m} = \mathbf{0,44 \text{ mm}}$$

$$u_{1,x,(2)} = \mathbf{0 \text{ mm}}$$

Acceleration in node i:  $\ddot{u}_{i,k,(j)} = \omega_j^2 \cdot G_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)}$

$$a_{4,x,(2)} = (21,5192)^2 \cdot 0,0170 \cdot (-0,020233) = -0,15928 \frac{m}{s^2} = \mathbf{-159,28 \text{ mm/s}^2}$$

$$a_{3,x,(2)} = (21,5192)^2 \cdot 0,0170 \cdot 0,030451 = 0,23972 \frac{m}{s^2} = \mathbf{239,72 \text{ mm/s}^2}$$

$$a_{2,x,(2)} = (21,5192)^2 \cdot 0,0170 \cdot 0,025755 = 0,20275 \frac{m}{s^2} = \mathbf{202,75 \text{ mm/s}^2}$$

$$a_{1,x,(2)} = \mathbf{0 \text{ mm/s}^2}$$

To obtain the global response, the modal responses need to be combined. In this Example the **SRSS-method** was used:

Displacements:

$$u_{4,x} = \sqrt{(u_{4,x,(1)})^2 + (u_{4,x,(2)})^2} = \sqrt{(23,93)^2 + (-0,34)^2} = \mathbf{23,93 \text{ mm}}$$

$$u_{3,x} = \sqrt{(u_{3,x,(1)})^2 + (u_{3,x,(2)})^2} = \sqrt{(12,73)^2 + (0,52)^2} = \mathbf{12,74 \text{ mm}}$$

$$u_{2,x} = \sqrt{(u_{2,x,(1)})^2 + (u_{2,x,(2)})^2} = \sqrt{(3,75)^2 + (0,44)^2} = \mathbf{3,78 \text{ mm}}$$

$$u_{1,x} = \mathbf{0 \text{ mm}}$$

Accelerations:

$$a_{4,x} = \sqrt{(a_{4,x,(1)})^2 + (a_{4,x,(2)})^2} = \sqrt{(260,73)^2 + (-159,28)^2} = \mathbf{305,53 \text{ mm/s}^2}$$

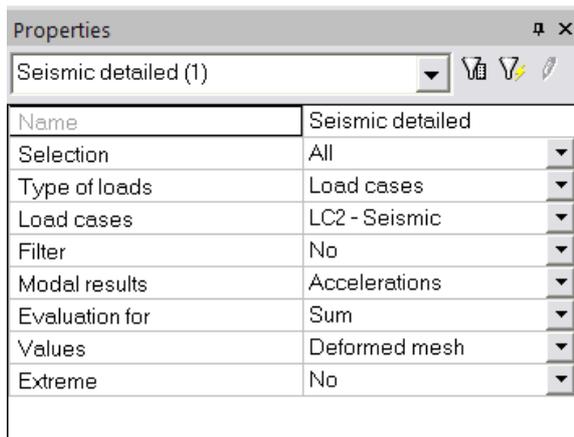
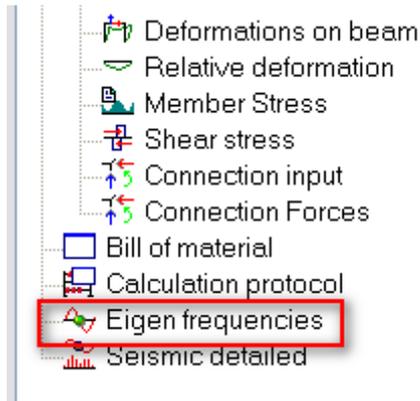
$$a_{3,x} = \sqrt{(a_{3,x,(1)})^2 + (a_{3,x,(2)})^2} = \sqrt{(138,68)^2 + (239,72)^2} = \mathbf{276,94 \text{ mm/s}^2}$$

$$a_{2,x} = \sqrt{(a_{2,x,(1)})^2 + (a_{2,x,(2)})^2} = \sqrt{(40,85)^2 + (202,75)^2} = \mathbf{206,82 \text{ mm/s}^2}$$

$$a_{1,x} = \mathbf{0 \text{ mm/s}^2}$$

In SCIA Engineer, a specific result menu **Seismic Detailed** was designed to view these modal displacements and accelerations.

In the Properties Window, the options for viewing the modal results can be set:



- In the field **Load Cases**, a Seismic Load case can be selected.
- The field **Modal results** allows choosing between the Displacements or Accelerations.
- **Evaluation for** is used to specify which results need to be shown: the results for a specific **Eigenmode**, the results for **All Eigenmodes** or the global, **Summarised** results.

The following results are obtained:

Modal Displacements:

<b>Seismic detailed</b>												
Linear calculation, Extreme : No												
Selection : All												
Load cases : LC2												
Case	Node	X [m]	Y [m]	Z [m]	Mode	Ux [mm]	Uy [mm]	Uz [mm]	Fix [mrad]	Fiy [mrad]	Fiz [mrad]	
LC2	1	0,000	0,000	0,000	1	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	0,0	
LC2	1	0,000	0,000	0,000	2	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	0,0	
LC2	2	0,000	0,000	4,000	1	3,75	0,00	0,00	0,0	1,7	0,0	
LC2	2	0,000	0,000	4,000	2	0,44	0,00	0,00	0,0	0,1	0,0	
LC2	3	0,000	0,000	8,000	1	12,73	0,00	0,00	0,0	2,6	0,0	
LC2	3	0,000	0,000	8,000	2	0,52	0,00	0,00	0,0	-0,1	0,0	
LC2	4	0,000	0,000	12,000	1	23,93	0,00	0,00	0,0	2,9	0,0	
LC2	4	0,000	0,000	12,000	2	-0,34	0,00	0,00	0,0	-0,3	0,0	

Modal Accelerations:

**Seismic detailed**

Linear calculation, Extreme : No  
 Selection : All  
 Load cases : LC2

Case	Node	X [m]	Y [m]	Z [m]	Mode	Ax [mm/sec <sup>2</sup> ]	Ay [mm/sec <sup>2</sup> ]	Az [mm/sec <sup>2</sup> ]	Alphax [mrad/sec <sup>2</sup> ]	Alphay [mrad/sec <sup>2</sup> ]	Alphaz [mrad/sec <sup>2</sup> ]
LC2	1	0,000	0,000	0,000	1	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	0,0
LC2	1	0,000	0,000	0,000	2	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	0,0
LC2	2	0,000	0,000	4,000	1	40,85	0,00	0,00	0,0	18,8	0,0
LC2	2	0,000	0,000	4,000	2	202,91	0,00	0,00	0,0	57,0	0,0
LC2	3	0,000	0,000	8,000	1	138,88	0,00	0,00	0,0	28,6	0,0
LC2	3	0,000	0,000	8,000	2	239,90	0,00	0,00	0,0	-51,2	0,0
LC2	4	0,000	0,000	12,000	1	260,72	0,00	0,00	0,0	31,4	0,0
LC2	4	0,000	0,000	12,000	2	-159,40	0,00	0,00	0,0	-123,5	0,0

Summarised Displacements:

**Seismic detailed**

Linear calculation, Extreme : No  
 Selection : All  
 Load cases : LC2

Case	Node	X [m]	Y [m]	Z [m]	Ux [mm]	Uy [mm]	Uz [mm]	Fix [mrad]	Fiy [mrad]	Fiz [mrad]
LC2	1	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	0,0
LC2	2	0,000	0,000	4,000	3,78	0,00	0,00	0,0	1,7	0,0
LC2	3	0,000	0,000	8,000	12,74	0,00	0,00	0,0	2,6	0,0
LC2	4	0,000	0,000	12,000	23,93	0,00	0,00	0,0	2,9	0,0

Summarised Accelerations:

**Seismic detailed**

Linear calculation, Extreme : No  
 Selection : All  
 Load cases : LC2

Case	Node	X [m]	Y [m]	Z [m]	Ax [mm/sec <sup>2</sup> ]	Ay [mm/sec <sup>2</sup> ]	Az [mm/sec <sup>2</sup> ]	Alphax [mrad/sec <sup>2</sup> ]	Alphay [mrad/sec <sup>2</sup> ]	Alphaz [mrad/sec <sup>2</sup> ]
LC2	1	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	0,0
LC2	2	0,000	0,000	4,000	206,98	0,00	0,00	0,0	60,0	0,0
LC2	3	0,000	0,000	8,000	277,10	0,00	0,00	0,0	58,6	0,0
LC2	4	0,000	0,000	12,000	305,59	0,00	0,00	0,0	127,4	0,0

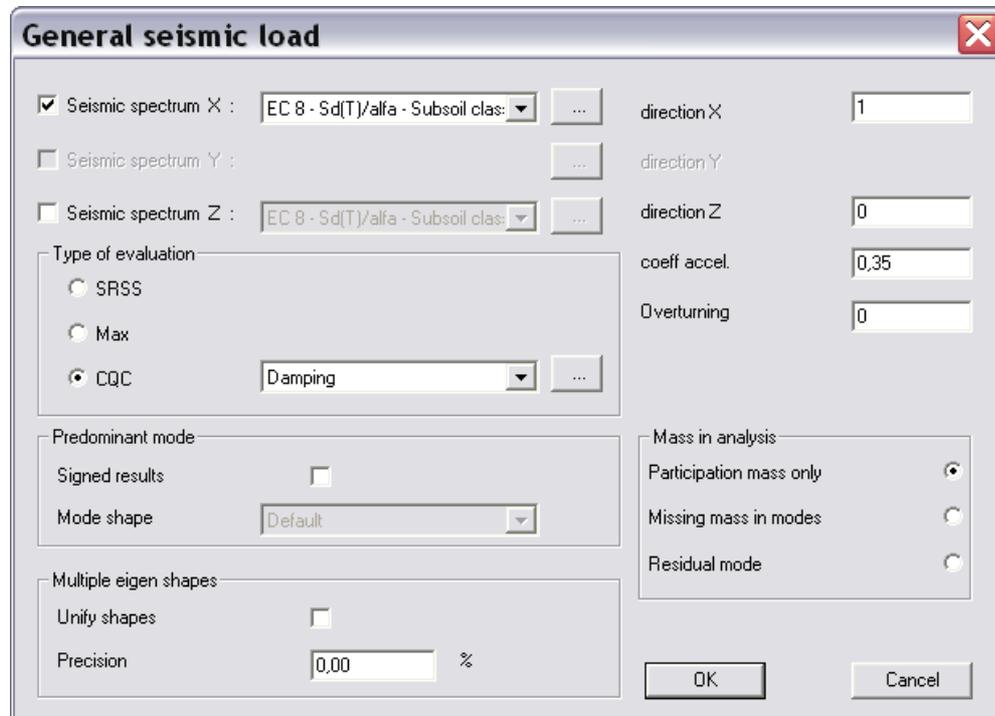
When comparing the results of the manual calculation and those obtained by SCIA Engineer, it is clear that both calculations correspond.

As specified in the theory, when using the **CQC-method**, a damping spectrum needs to be defined. To illustrate this, the above Example is calculated again, but now using the **CQC-method** for the modal combination.

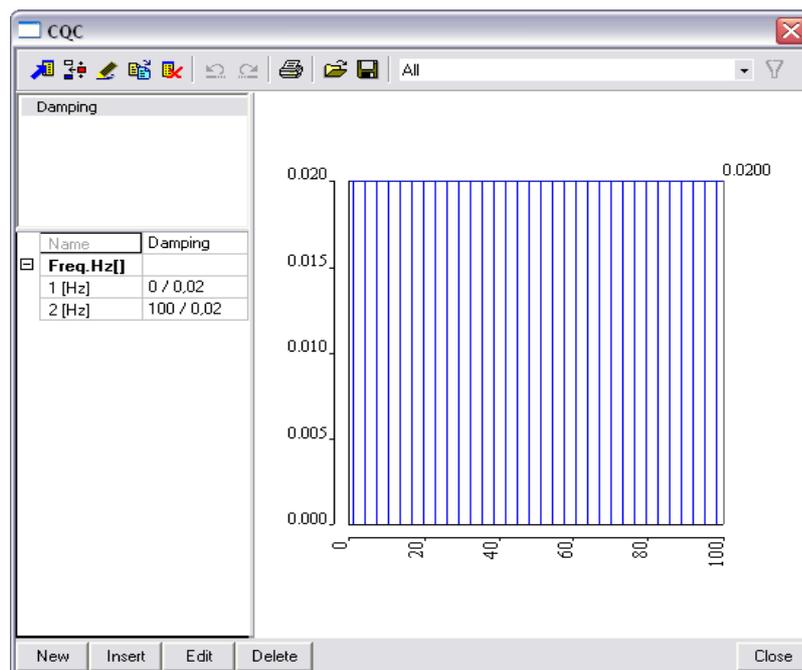
### Exemple 9: Spectral Analysis\_3.esa

L'exemple précédent est repris et sera désormais calculé en utilisant la **méthode CQC**.  
Pour toutes les fréquences, un amortissement de **2%** est utilisé.

À l'Etape 6, la méthode **CQC** est choisie dans la zone **Type d'évaluation** :



En utilisation le bouton  qui se trouve derrière CQC, un spectre d'amortissement peut être défini. Puisque, pour cet exemple, un taux d'amortissement constant sera utilisé pour tous les modes propres, une valeur de **2%** est prise pour toutes les fréquences de **0 Hz à 100 Hz**



Ce spectre d'amortissement sera utilisé pour le calcul des **Coefficients de Corrélation Modale** de la **méthode CQC** et sera également utilisé pour calculer le **Coefficient d'Amortissement** pour chaque mode comme spécifié dans l'exemple précédent.

Lorsque le spectre a été défini, le **Calcul Linéaire** peut être ré-exécuté.

Le **Protocole de calcul du Calcul Linéaire** donne les résultats suivants :

Number	Freq. [Hz]	Damp ratio	Damp coef.	Sax [m/s <sup>2</sup> ]	Say [m/s <sup>2</sup> ]	Saz [m/s <sup>2</sup> ]	G(j)	Fx [kN]	Fy [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]
1	0.4985	0.0200	1.1952	0.2339	0.0000	0.0000	0.8416	0.2914	0.0000	0.0000	2.8853
2	3.1806	0.0200	1.1952	0.5235	0.0000	0.0000	0.0255	0.1974	0.0000	0.0000	0.5670
Level=	0.00							0.35	0.00	0.00	2.94

Les résultats montrent que pour chaque mode, le facteur d'amortissement est égal à **2%**.

Comme spécifié dans la théorie, les Spectres Sismiques de l'Eurocode 8 ont été définis en utilisant un taux d'amortissement de 5%. Une autre valeur est utilisée pour l'amortissement, le spectre doit être corrigé en utilisant un **Coefficient d'Amortissement  $\eta$** .

Selon l'Eurocode 8 [6], ce coefficient est calculé comme suit :

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{(5 + \xi)}} \geq 0,55 \quad (4.13)$$

Avec :  $\xi$  = Taux d'Amortissement exprimé en pourcentage.

Pour un taux d'amortissement par défaut de **5%**,  $\eta$  est égal à l'unité.

La limite inférieure de **0,55** pour le Coefficient d'Amortissement indique que lorsque le Taux d'Amortissement est plus grand que  $\pm 28.06\%$ , il n'a plus aucune influence sur le spectre sismique.

Pour l'application exacte de  $\eta$  dans les formules des spectres de conception, il est fait référence à l'Eurocode 8 [7].

Dans cet exemple, un taux d'amortissement de 2% donne le coefficient d'amortissement suivant :

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{(5 + 2)}} = 1,1953$$

Cela indique que les accélérations spectrales seront augmentées de **20%** parce qu'il y a moins d'amortissement dans la structure. Les accélérations spectrales de l'exemple précédent peuvent donc être multipliées par  $\eta$ :

$$\Rightarrow S_{ax,(1)} = 0,2019 \frac{m}{s^2} \cdot 1,1952 = 0,2413 \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow S_{ax,(2)} = 0,4380 \frac{m}{s^2} \cdot 1,1952 = 0,5235 \frac{m}{s^2}$$

Avec ces nouvelles accélérations spectrales, le calcul du Cisaillement à la Base, du Moment de Renversement, ... peut être répété.

## Calcul Manuel

In this paragraph, the application of the **CQC-method** is illustrated for the global response of the Base Shear.

Mode 1:  $\omega_{(1)} = 3,3007 \text{ rad/s}$        $F_{(1)} = 0,2912 \text{ kN}$

Mode 2:  $\omega_{(2)} = 21,5192 \text{ rad/s}$        $F_{(2)} = 0,1875 \text{ kN}$

Using a spreadsheet, the Modal Cross Correlation coefficients  $\rho_{i,j}$  are calculated with a damping ratio  $\xi_{i,j}$  of **2%**.

Mode	1	2
1	1	0,00023245
2	0,00023245	1

$$\begin{aligned}
 R_{tot} &= \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_{(i)} \cdot \rho_{i,j} \cdot R_{(j)}} \\
 &= \sqrt{0,2912kN \cdot 1 \cdot 0,2912kN + 0,2912kN \cdot 0,00023245 \cdot 0,1875kN} \\
 &\quad + 0,1875kN \cdot 0,00023245 \cdot 0,2912kN + 0,1875kN \cdot 1 \cdot 0,1875kN} \\
 &= 0,346kN
 \end{aligned}$$

### 4.3 Combinaisons Sismiques

Il existe différentes possibilités qui permettent de créer des combinaisons de charges qui comprennent également les cas de charge sismique.

Nous allons expliquer ici l'une de ces méthodes au moyen d'un exemple :

#### SeismCombi\_together.esa.

Tout d'abord, 3 cas de charge sont créés.

Le format général des effets des actions doit être :

$$E_d = E \left\langle G_{k,j}; P; A_{Ed}; \psi_{2,i} Q_{k,i} \right\rangle \quad j \geq 1; i \geq 1$$

La combinaison des actions entre crochets peut être écrite :

$$\sum_{j \geq 1} G_{k,j} + "P" + "A_{ED} + \sum_{i \geq 1} \psi_{2,i} Q_{k,i}$$

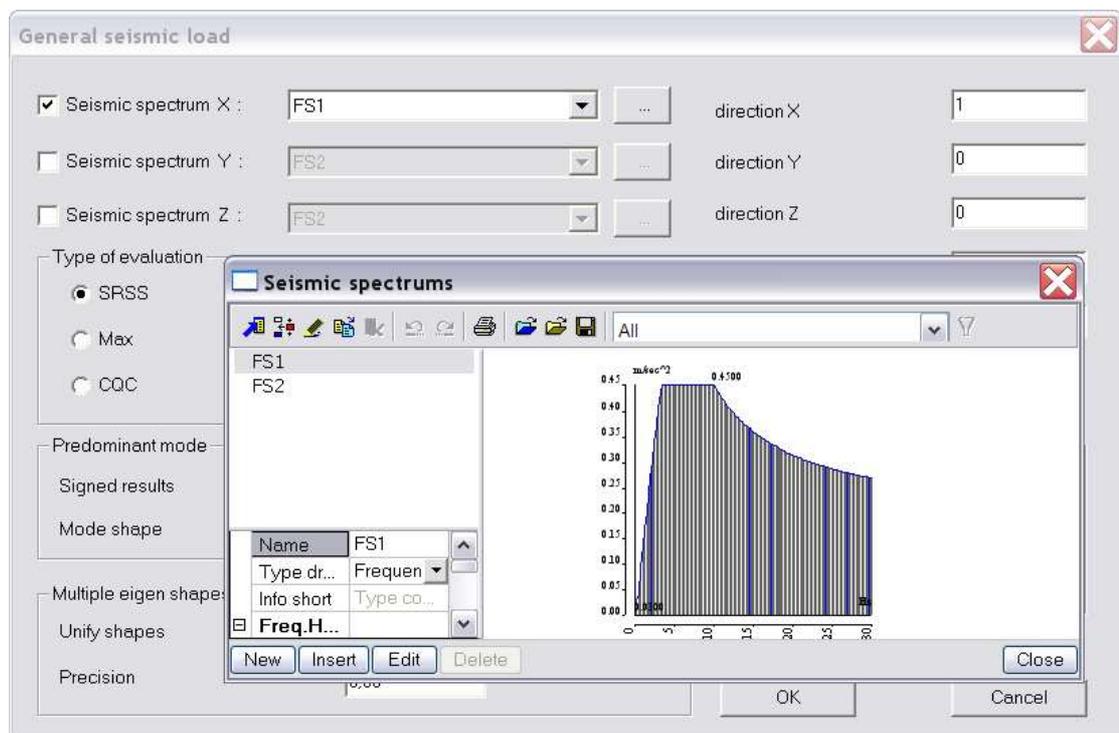
Where  $E_d$ :

$$E_{Edx} + 0,3E_{Edy} + 0,3E_{Edz}$$

$$0,3E_{Edx} + E_{Edy} + 0,3E_{Edz}$$

$$0,3E_{Edx} + 0,3E_{Edy} + E_{Edz}$$

Ces cas de charge comprennent respectivement les spectres sismiques dans les directions X, Y et Z (les spectres sismiques pour X et Y sont égaux, mais différents du spectre dans la direction verticale Z) :



**General seismic load**

Seismic spectrum X : FS1 direction X 0  
 Seismic spectrum Y : FS1 direction Y 1  
 Seismic spectrum Z : FS1 direction Z 0

Type of evaluation

- SRSS
- Max
- CQC

Predominant mode

Signed results

Mode shape

Multiple eigen shapes

Unify shapes

Precision

**Seismic spectrums**

FS1  
FS2

Name	FS1
Type dr...	Frequen
Info short	Type co...
<input checked="" type="checkbox"/> Freq.H...	
1 [Hz,se...	0,00 / 100...
2 [Hz,se...	0,25 / 1,0...

New Insert Edit Delete Close

**General seismic load**

Seismic spectrum X : FS1 direction X 0  
 Seismic spectrum Y : FS1 direction Y 0  
 Seismic spectrum Z : FS2 direction Z 1

Type of evaluation

- SRSS
- Max
- CQC

Predominant mode

Signed results

Mode shape

Multiple eigen shapes

Unify shapes

Precision

**Seismic spectrums**

FS1  
FS2

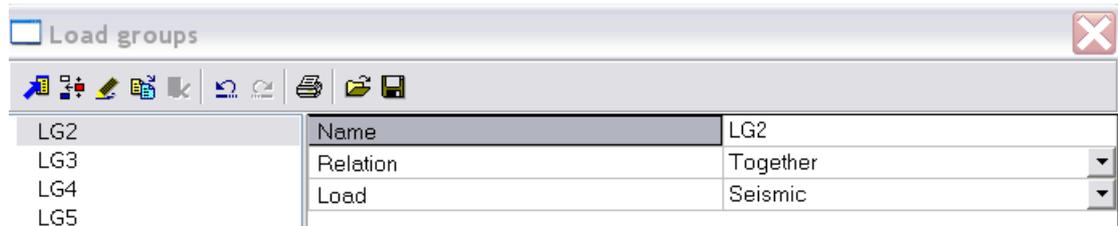
32 [Hz,s...	7,75 / 0,1...
33 [Hz,s...	8,00 / 0,1...
34 [Hz,s...	8,25 / 0,1...
35 [Hz,s...	8,50 / 0,1...
36 [Hz,s...	8,75 / 0,1...
37 [Hz,s...	9,00 / 0,1...
38 [Hz,s...	9,25 / 0,1...

New Insert Edit Delete Close

Ensuite, nous devons attribuer un type de groupe de charge au cas de charge sismique.

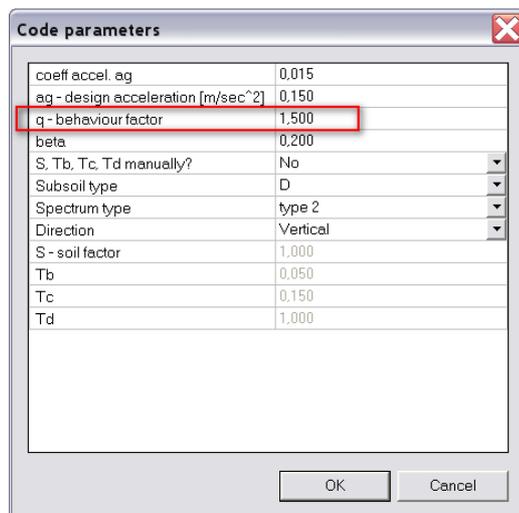
Pour commencer, la relation entre les cas de charge dans le même groupe doit être définie. Les trois spectres sismiques doivent toujours apparaître dans la même combinaison. Pour cela, l'option «ensemble» sera choisie.

Ensuite, le type de charge doit être sélectionné : dans ce cas, il faut choisir le type 'sismique'.



**Remarque :**

*Dans le cas de l'EC-EN, nous devons créer deux cas de charge pour chaque spectre. A savoir, un pour les **déformations** et un pour les **efforts internes**. Pour les déformations, nous prenons une valeur de 1 pour le **facteur de comportement q** et pour les efforts internes une valeur de q (différentes de 1) afin que les fréquences utilisées pour les forces soient divisés par cette valeur.*



Après la création des cas de charge sismiques, les combinaisons peuvent être faites. A cette fin, un nouveau type de combinaisons a été mis en place : il s'agit de la combinaison sismique selon l'EC-EN.

Selon le contenu de E\_d (voir ci-dessus), l'utilisateur doit créer (2) 3 combinaisons (2D) en 3D pour les déplacements et (2) 3 combinaisons (2D) en 3D pour les efforts internes.

$$E_{Edx} + 0,3E_{Edy} + 0,3E_{Edz}$$

$$0,3E_{Edx} + E_{Edy} + 0,3E_{Edz}$$

$$0,3E_{Edx} + 0,3E_{Edy} + E_{Edz}$$

The image shows three sequential screenshots of the 'Combinations' software interface. Each window displays a list of combinations on the left and a detailed configuration table on the right. The 'Input combinations' dropdown is set to 'Input combinations'.

**First Screenshot (Sa):**

Sa	Name	Sa
Sb	Description	
Sc	Type	EN-Seismic
	<b>Contents of combination</b>	
	LC1 - P [-]	1,00
	LC2 - seim x [-]	1,00
	LC3 - seim y [-]	0,30
	LC4 - seim z [-]	0,30
	LC5 - Q / cat E [-]	1,00

**Second Screenshot (Sb):**

Sa	Name	Sb
Sb	Description	
Sc	Type	EN-Seismic
	<b>Contents of combination</b>	
	LC1 - P [-]	1,00
	LC2 - seim x [-]	0,30
	LC3 - seim y [-]	1,00
	LC4 - seim z [-]	0,30

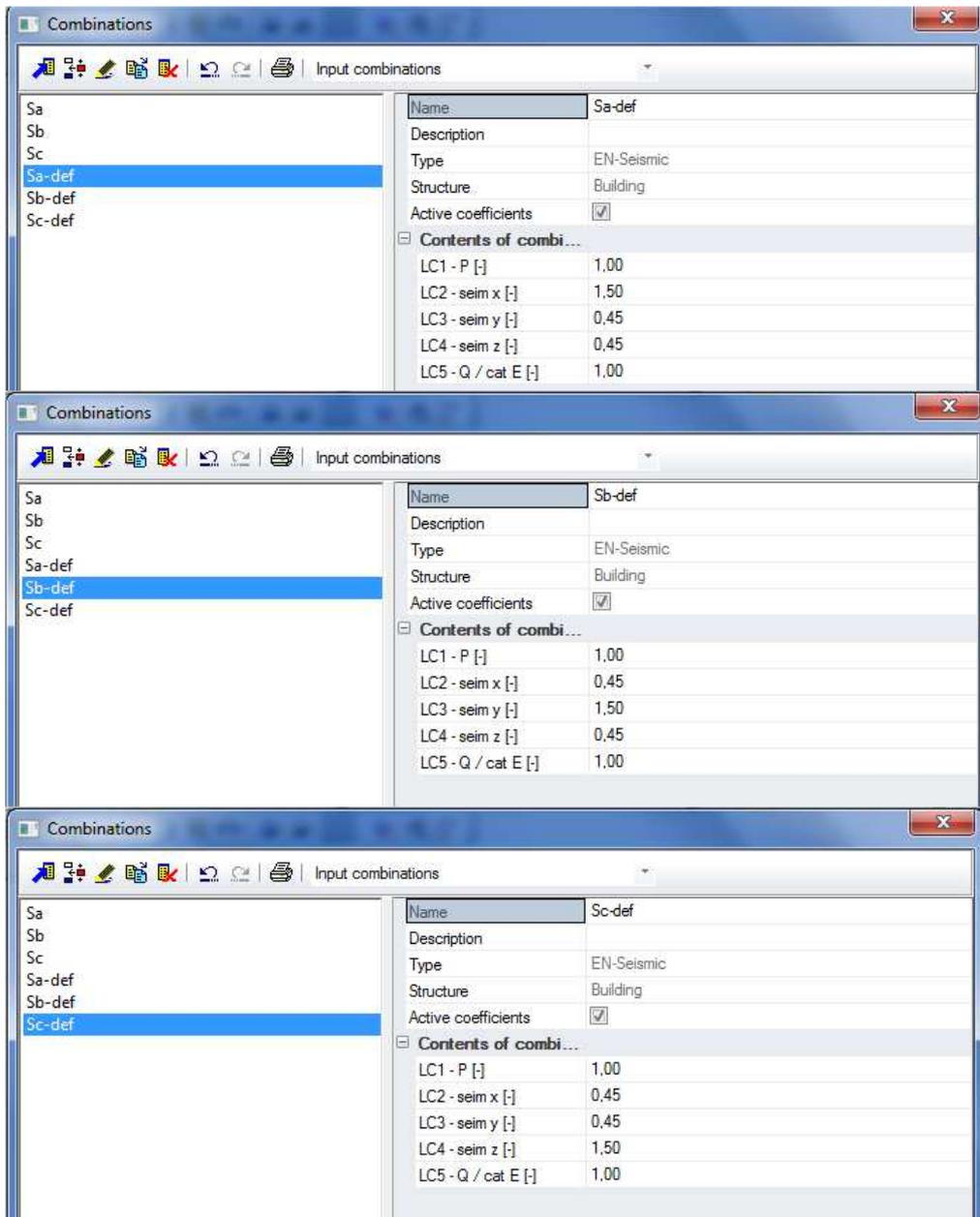
**Third Screenshot (Sc):**

Sa	Name	Sc
Sb	Description	
Sc	Type	EN-Seismic
	<b>Contents of combination</b>	
	LC1 - P [-]	1,00
	LC2 - seim x [-]	0,30
	LC3 - seim y [-]	0,30
	LC4 - seim z [-]	1,00
	LC5 - Q / cat E [-]	1,00

**Remarque:**

Dans le cas de l'EC-EN, vous devez créer deux ensembles de combinaisons, un pour les **déformations** et un autre pour les **efforts internes**. Cela veut dire qu'il faudrait au total six combinaisons de type EN-Sismique. Pour les efforts internes, les combinaisons doivent être introduits comme décrit ci-dessus. Pour les résultats de déformations, nous allons également multiplier par la valeur du **coefficient de comportement q** qui a été utilisé pour le spectre.

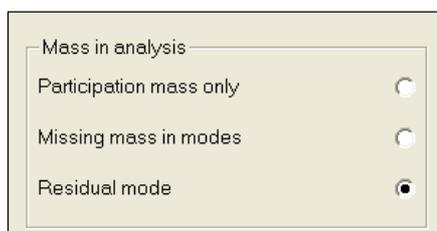
Si nous considérons notre exemple avec le coefficient q de 1.5, les combinaisons additionnelles qui doivent être faites ont le contenu suivant:



## 4.4 Masse dans l'analyse

Comme mentionné précédemment, la somme des masses modales effectives pour les modes pris en compte doit s'élever à au moins 90%.

Dans SCIA Engineer l'utilisateur dispose des options suivantes pour un cas de charge sismique.



La méthode utilisée est affichée dans le protocole de calcul linéaire.

Dans les exemples suivants, les différences entre ces trois options sont expliquées en détail.

Dans ces projets, le principe général utilisé est le suivant :

Tout d'abord, un spectre sismique est introduit. Pour ce spectre, les déplacements modaux sont calculés pour chaque mode. Dans ce cas il y a 2 modes. Ensuite, les déplacements sont transformés en cas de charge réels. Pour ces deux cas de charge, les résultats des efforts internes et des réactions peuvent être demandés. Selon la méthode d'analyse spécifiée, les résultats sont additionnés. Cela sera fait avec les trois types de «masse dans l'analyse».

### Exemple 10: Spectral\_Analysis\_participation mass only.esa

Si l'option 'masse participante seule est cochée', le calcul standard est utilisé. Dans ce cas, seule la masse participante à partir du nombre de modes sélectionnés est prise en compte et l'utilisateur doit vérifier que la règle des 90% de l'Eurocode est respectée. En d'autres termes, en utilisant cette méthode, il est important que la quantité totale des masses en X, Y et Z soit suffisante.

Dans l'exemple, une structure faite de poutres à sections rectangulaires est soumise à des forces dynamiques. Le matériau utilisé est le **C25/30** selon l'**EC-EN**. La hauteur de chaque poteau est de **5m**.

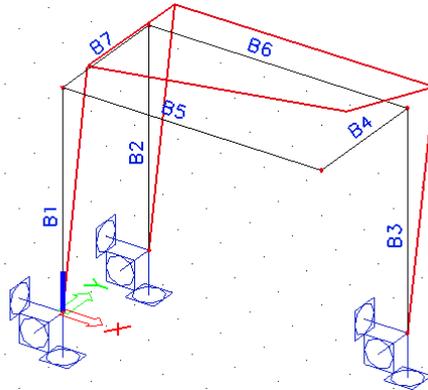
Ensuite, un cas de charge sismique est introduit. Le spectre sismique agit dans 3 directions. Une accélération de  $2 \text{ m/s}^2$  est donnée en fonction de la fréquence.

La méthode d'évaluation SRSS est utilisé en même temps que l'option 'masse participante seule'.

L'analyse de la Fréquence propre donne le résultat suivant :

Mass combination	f [Hz]	$\omega$ [1/sec]	$\omega^2$ [1/sec <sup>2</sup> ]	T [sec]
1	2,05	12,9	166,4	0,49
2	2,39	15,03	225,81	0,42

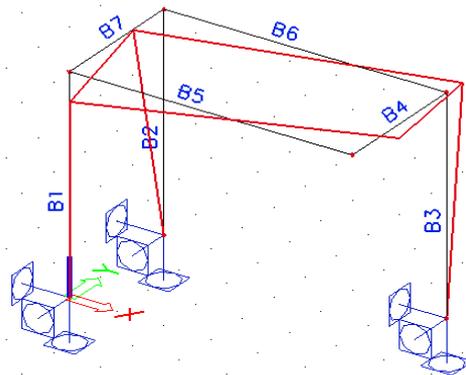
Déformation pour la combinaison de masses CM1/1-2,05 :



Mass combinations : CM1/1 - 2,05  
Values are multiplied by 10000 for better numeric representation.

Node of mesh	Case	Ux [1]	Uy [1]	Uz [1]	Fix [1]	Fiy [1]	Fiz [1]
1	CM1/1 - 2,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	CM1/1 - 2,05	-12,67	151,53	0,42	-3,37	-20,19	-0,68
3	CM1/1 - 2,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	CM1/1 - 2,05	-7,78	151,53	-0,36	-3,40	-1,54	-0,77
5	CM1/1 - 2,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	CM1/1 - 2,05	-7,77	156,36	0,01	-43,20	-2,72	-1,15
7	CM1/1 - 2,05	-12,65	156,37	128,92	-42,72	-13,54	-1,54

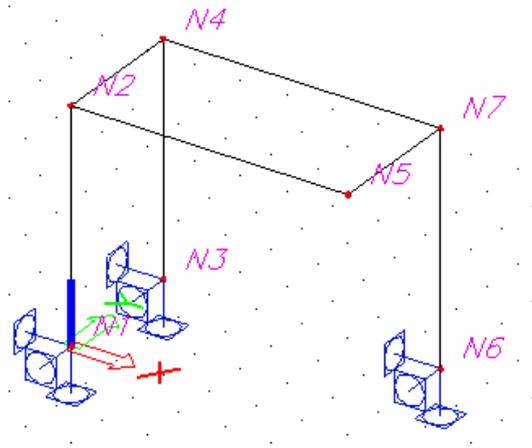
Déformation pour la combinaison de masses CM1/2-2,39:



Mass combinations : CM1/2 - 2,39  
Values are multiplied by 10000 for better numeric representation.

Node of mesh	Case	Ux [1]	Uy [1]	Uz [1]	Fix [1]	Fiy [1]	Fiz [1]
1	CM1/2 - 2,39	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	CM1/2 - 2,39	133,69	-196,89	-0,10	2,39	-6,12	42,74
3	CM1/2 - 2,39	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	CM1/2 - 2,39	4,29	-196,89	0,22	2,36	-0,76	45,54
5	CM1/2 - 2,39	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	CM1/2 - 2,39	4,31	93,16	-0,01	-24,03	0,71	35,49
7	CM1/2 - 2,39	133,67	93,17	71,21	-23,51	-7,95	47,31

- Les masses des nœuds participants (N2, N4, N5 and N7) sont nécessaires. La masse est attribuée au nœud d'extrémité de chaque élément.



Calcul de la masse X pour N2 :

Masse X =  $2500 \text{ kg/m}^3 \times (2,5 \times \text{aire (rect 150;150)} + 3 \times \text{aire (rect 300;150)} + 1,5 \times \text{aire (rect 300;150)}) = 646,875 \text{ kg}$ .

La masse totale est :

node	mass x [kg]	mass y [kg]	mass z [kg]
N2	646,875	646,875	646,875
N4	646,875	646,875	646,875
N5	787,5	787,5	787,5
N7	1537,5	1537,5	1537,5
total	3618,75	3618,75	3618,75

- Le **facteur de participation modale** est calculé comme suit :

$$\gamma_{k(j)} = \{\phi_k\}^T \gamma_{k(j)} = \{\phi_k\}^T \{m\}$$

Calcul de  $\gamma_x$  pour le mode 1:

$$\{\phi_{x,(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,001267 \\ 0 \\ -0,000778 \\ -0,001265 \\ 0 \\ -0,000777 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{m_x\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 646,875 \\ 0 \\ 646,875 \\ 787,5 \\ 0 \\ 1537,5 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \gamma_{x,(1)} = -0,001267 \cdot 647 - 0,000778 \cdot 647 - 0,001265 \cdot 788 - 0,000777 \cdot 1538 = -3,514$$

La matrice de facteur de participation est :

(j) units	$\gamma_x$ [kg <sup>0.5</sup> ]	$\gamma_y$ [kg <sup>0.5</sup> ]	$\gamma_z$ [kg <sup>0.5</sup> ]
1	-3,514	55,959	10,158
2	20,115	-3,812	5,614

- A l'aide de cette matrice, les **masses effectives** peuvent être calculées :

$$M_{ef_{k,(j)}} = \gamma_{k,(j)}^2$$

Calcul de Mef pour le mode 1 dans la direction x:

$$\Rightarrow M_{ef,x,(1)} = -3,514^2 = 12,346$$

(j) units	Mef_x [kg]	Mef_y [kg]	Mef_z [kg]
1	12,346	3131,374	103,182
2	404,603	14,533	31,517

- La formule pour le **rapport de participation de masse** est la suivante :

$$L_{k,(j)} = \frac{M_{ef_{k,(j)}}}{M_{tot_k}}$$

$$\Rightarrow L_{x,(1)} = \frac{12,346}{3618,75} = 0,0034$$

(j) units	L_x [-]	L_y [-]	L_z [-]
1	0,0034	0,8653	0,0285
2	0,1118	0,0040	0,0087

- Le **spectre d'accélération S** a une valeur constante de 2 m/s<sup>2</sup> :

(j)	S_x [m/sec <sup>2</sup> ]	S_y [m/sec <sup>2</sup> ]	S_z [m/sec <sup>2</sup> ]
1	2	2	2
2	2	2	2

- Calcul du **coefficient de mode** dans chaque direction :

$$G_{k,(j)} = \frac{S_{a_{k,(j)}} \times \gamma_{k,(j)}}{\omega_{(j)}^2}$$

Pour la direction x et le mode par exemple :

$$\Rightarrow G_{x,(1)} = \frac{2 \cdot -3,514}{166,4} = -0,042$$

(j)	G_x [m*kg <sup>0.5</sup> ]	G_y [m*kg <sup>0.5</sup> ]	G_z [m*kg <sup>0.5</sup> ]	G [m*kg <sup>0.5</sup> ]
1	-0,042	0,673	0,122	0,7524
2	0,178	-0,034	0,050	0,1941

- Maintenant, les **forces latérales** dans chaque nœud peuvent être calculées :

$$F_{i,k,(j)} = m_{i,k,(j)} \cdot \ddot{u}_{i,k,(j)} = m_{i,k,(j)} \cdot G_{(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)} \cdot \omega_{(j)}^2$$

Comme exemple, ceci est calculé pour le nœud 2 dans la direction X :

$$\Rightarrow F_{N2,x,(1)} = 646,875 \cdot 0,7524 \cdot (-0,001267) \cdot 166,4 = -102,6N$$

**mode 1**

node	F_x(1) [N]	F_y(1) [N]	F_z(1) [N]
2	-102,6	1227,3	3,4
4	-63,0	1227,3	-2,9
5	-124,7	1541,8	1271,1
7	-149,6	3010,0	0,2
summ	-439,9	7006,3	1271,8

**mode 2**

node	F_x(1) [N]	F_y(1) [N]	F_z(1) [N]
2	379,1	-558,3	-0,3
4	12,2	-558,3	0,6
5	461,4	321,6	245,8
7	29,0	627,8	-0,1
summ	881,7	-167,1	246,1

- Les **efforts de cisaillement** dans les directions X, Y et Z :

$$F_{k,(j)} = \sum_i F_{i,k,(j)} l$$

Pour le mode 1 dans la direction x:

$$\Rightarrow F_{x,(1)} = \frac{-439,9}{1000} = -0,4399kN$$

(j)	F_x	F_y	F_z
units	[kN]	[kN]	[kN]
1	-0,4399	7,0063	1,2718
2	0,8817	-0,1671	0,2461
summ	0,99	7,01	1,30

- Le **moment de renversement** dans chaque nœud et dans chaque direction est :

$$M_{i,ki(j)} = F_{i,k,(j)} * z_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_{N2,x,(1)} &= F_{N2,y,(1)} \cdot (\text{height} - \text{overturning height}) \\ &= 1227,3N \cdot (5m - 0m) = -6136,4Nm \end{aligned}$$

Les autres valeurs sont :

**mode 1**

node	M_x(1) [Nm]	M_y(1) [Nm]
2	-6136,4	513,1
4	-6136,4	315,1
5	-7709,0	623,6
7	-15049,9	747,9

**mode 2**

node	M_x(2) [Nm]	M_y(2) [Nm]
2	2791,4	-1895,4
4	2791,4	-60,8
5	-1608,1	-2307,1
7	-3139,2	-145,2

- La somme des moments pour chaque nœud donne le **moment de renversement à la base** :

(j)	M <sub>x</sub>	M <sub>y</sub>
units	[kN]	[kN]
1	-35,0317	2,1997
2	0,8355	-4,4085
summ	35,04	4,93

Les moments pour chaque mode séparé sont combinés avec la méthode SRSS.

- Calcul du **déplacement modal** :

$$\mathbf{u}_{i,k,(j)} = \mathbf{G}_{(j)} * \phi_{k,(j)}$$

Pour le nœud 2 dans la direction X et pour le premier mode :

$$\{G_{(1)}\} = \{0,7524\} \text{ et } \{\phi_{N2,x,(1)}\} = \{-0,001267\}$$

$$\Rightarrow u_{N2,x,(1)} = (0,7524 \cdot -0,001267) \cdot 1000 = -0,95 \text{ mm}$$

Les autres valeurs :

**mode 1**

node	ux	uy	uz
	[mm]	[mm]	[mm]
2	-0,95	11,40	0,03
4	-0,59	11,40	-0,03
5	-0,95	11,77	9,70
7	-0,58	11,77	0,00

**mode 2**

node	ux	uy	uz
	[mm]	[mm]	[mm]
2	2,60	-3,82	0,00
4	0,08	-3,82	0,00
5	2,59	1,81	1,38
7	0,08	1,81	0,00

**summ**

node	ux	uy	uz
	[mm]	[mm]	[mm]
2	2,76	12,03	0,03
4	0,59	12,03	0,03
5	2,76	11,90	9,80
7	0,59	11,90	0,00

- Calcul de l'**accélération modale** :

$$\ddot{u}_{i,k,(j)} = \omega_{(j)}^2 * G_{(j)} * \phi_{k,(j)}$$

Pour le nœud 2 dans la direction X et pour le premier mode :

$$\Rightarrow \ddot{u}_{N2,x,(1)} = -0,95 \cdot 166,4 = -158,6 \text{ mm/s}^2$$

**mode 1**

node	ax [mm/sec <sup>2</sup> ]	ay [mm/sec <sup>2</sup> ]	az [mm/sec <sup>2</sup> ]
2	-158,6	1897,2	5,3
4	-97,4	1897,2	-4,5
5	-158,4	1957,8	1614,2
7	-97,3	1957,7	0,1

**mode 2**

node	ax [mm/sec <sup>2</sup> ]	ay [mm/sec <sup>2</sup> ]	az [mm/sec <sup>2</sup> ]
2	586,0	-863,0	-0,4
4	18,8	-863,0	1,0
5	585,9	408,4	312,1
7	18,9	408,4	0,0

**summ**

node	ax [mm/sec <sup>2</sup> ]	ay [mm/sec <sup>2</sup> ]	az [mm/sec <sup>2</sup> ]
2	607,1	2084,3	5,3
4	99,2	2084,3	4,6
5	606,9	2000,0	1644,1
7	99,1	1999,9	0,1

Ensuite, les déplacements sont introduits dans la structure à l'aide d'un cas de charge :

Support in node	Load case	Dir	Value - U [mm]	Support in node	Load case	Dir	Value - U [mm]
Sn4	LC3	X	-0,95	Sn4	LC4	X	2,60
Sn7	LC3	X	-0,95	Sn7	LC4	X	2,60
Sn5	LC3	X	-0,59	Sn5	LC4	X	0,08
Sn6	LC3	X	-0,59	Sn6	LC4	X	0,08
Sn4	LC3	Y	11,40	Sn4	LC4	Y	-3,82
Sn5	LC3	Y	11,40	Sn5	LC4	Y	-3,82
Sn7	LC3	Y	11,77	Sn7	LC4	Y	1,81
Sn6	LC3	Y	11,77	Sn6	LC4	Y	1,81
Sn7	LC3	Z	9,70	Sn7	LC4	Z	1,38

Pour ces cas de charge, les efforts internes suivants sont calculés :

Linear calculation, Extreme : Member, System : Principal  
 Selection : All  
 Load cases : LC3

Member	Case	dx [m]	N [kN]	Vy [kN]	Vz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]	
B1	LC3		0	4,38	-1,35	0,36	0,01	-0,49	3,44
B1	LC3		5	4,38	-1,35	0,36	0,01	1,29	-3,3
B2	LC3		0	-3,73	-1,35	-0,04	0,01	0,12	3,44
B2	LC3		5	-3,73	-1,35	-0,04	0,01	-0,06	-3,3
B3	LC3		0	0,62	-4,32	-0,78	0,28	6,54	18,85
B3	LC3		5	0,62	-4,32	-0,78	0,28	2,65	-2,73
B4	LC3		0	0	0,35	0,08	-4,43	-1,48	-0,4
B4	LC3		3	0	0,35	0,08	-4,43	-1,24	0,63
B5	LC3		0	0	-0,12	-1,19	1,48	2,69	0,35
B5	LC3		6	0	-0,12	-1,19	1,48	-4,43	-0,4
B6	LC3		0	0	-0,12	0,54	1,49	-1,46	0,33
B6	LC3		6	0	-0,12	0,54	1,49	1,78	-0,36
B7	LC3		0	0	0,23	-3,19	-1,4	4,78	-0,35
B7	LC3		3	0	0,23	-3,19	-1,4	-4,8	0,34

Linear calculation, Extreme : Member, System : Principal  
 Selection : All  
 Load cases : LC4

Member	Case	dx [m]	N [kN]	Vy [kN]	Vz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]	
B1	LC4		0	-0,27	0,46	0,36	-0,15	-0,88	-1,17
B1	LC4		5	-0,27	0,46	0,36	-0,15	0,94	1,15
B2	LC4		0	0,59	0,46	0,01	-0,16	-0,03	-1,17
B2	LC4		5	0,59	0,46	0,01	-0,16	0,04	1,15
B3	LC4		0	-0,08	-0,77	0,49	-2,26	-1,52	3,07
B3	LC4		5	-0,08	-0,77	0,49	-2,26	0,94	-0,76
B4	LC4		0	0	-0,55	-0,08	-0,91	-0,25	-0,12
B4	LC4		3	0	-0,55	-0,08	-0,91	-0,5	-1,78
B5	LC4		0	0	-0,05	-0,33	0,25	1,04	0,2
B5	LC4		6	0	-0,05	-0,33	0,25	-0,91	-0,12
B6	LC4		0	0	-0,13	0,01	0,26	-0,06	0,31
B6	LC4		6	0	-0,13	0,01	0,26	-0,03	-0,48
B7	LC4		0	0	0,06	0,6	-0,1	-0,9	-0,05
B7	LC4		3	0	0,06	0,6	-0,1	0,89	0,14

Selon la méthode SRSS, la formule suivante est utilisée :

$$R_{tot} = \sqrt{\sum_{j=1}^N R_j^2}$$

Prenons par exemple l'effort normal dans la barre B1 :

$$N_{tot} = \sqrt{(4,38kN)^2 + (-0,27kN)^2} = 4.39kN$$

Member	dx [m]	N [kN]	Vy [kN]	Vz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
B1	0,00	4,39	1,43	0,51	0,15	1,01	3,63
B1	5,00	4,39	1,43	0,51	0,15	1,60	3,49
B2	0,00	3,78	1,43	0,04	0,16	0,12	3,63
B2	5,00	3,78	1,43	0,04	0,16	0,07	3,49
B3	0,00	0,63	4,39	0,92	2,28	6,71	19,10
B3	5,00	0,63	4,39	0,92	2,28	2,81	2,83
B4	0,00	0,00	0,65	0,11	4,52	1,50	0,42
B4	3,00	0,00	0,65	0,11	4,52	1,34	1,89
B5	0,00	0,00	0,13	1,23	1,50	2,88	0,40
B5	6,00	0,00	0,13	1,23	1,50	4,52	0,42
B6	0,00	0,00	0,18	0,54	1,51	1,46	0,45
B6	6,00	0,00	0,18	0,54	1,51	1,78	0,60
B7	0,00	0,00	0,24	3,25	1,40	4,86	0,35
B7	3,00	0,00	0,24	3,25	1,40	4,88	0,37

Ces valeurs correspondent aux efforts internes pour le cas de charge séisme dans le projet. La même chose peut être faite pour les réactions :

Linear calculation, Extreme : Node  
 Selection : All  
 Load cases : LC3

Support	Case	Rx [kN]	Ry [kN]	Rz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
Sn1/N1	LC3	-0,36	-1,35	-4,38	3,44	-0,49	0,01
Sn2/N6	LC3	0,78	-4,32	-0,62	18,85	6,54	0,28
Sn3/N3	LC3	0,04	-1,35	3,73	3,44	0,12	0,01

Linear calculation, Extreme : Node  
 Selection : All  
 Load cases : LC4

Support	Case	Rx [kN]	Ry [kN]	Rz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
Sn1/N1	LC4	-0,36	0,46	0,27	-1,17	-0,88	-0,15
Sn2/N6	LC4	-0,49	-0,77	0,08	3,07	-1,52	-2,26
Sn3/N3	LC4	-0,01	0,46	-0,59	-1,17	-0,03	-0,16

Calcul de la réaction pour N1:

$$\Rightarrow R_x = \sqrt{(-0,36kN)^2 + (-0,36kN)^2} = 0,51$$

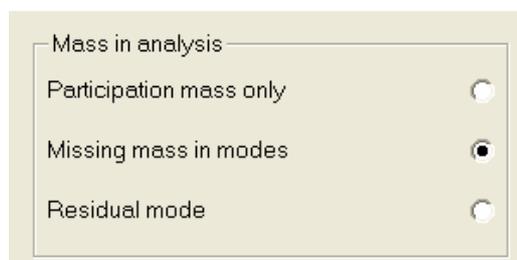
Support	Case	Rx [kN]	Ry [kN]	Rz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
Sn1/N1	LC2	0,51	1,43	4,39	3,63	1,01	0,15
Sn2/N6	LC2	0,92	4,39	0,63	19,10	6,71	2,28
Sn3/N3	LC2	0,04	1,43	3,78	3,63	0,12	0,16

Après avoir vérifié les résultats dans 'Spectral\_analysis\_participation mass only.esa' pour le cas de charge sismique, nous pouvons conclure que ces valeurs correspondent aux valeurs calculées par SCIA Engineer.

### Exemple 11: Spectral\_Analysis\_missing mass .esa

Prenons le cas dans lequel la somme des masses suivantes est atteinte respectivement dans la direction X, Y et Z : 30%, 80% et 10%.

Avec l'option 'masse manquante dans les modes', les masses sont ajoutées jusqu'à ce qu'une valeur de 100% soit atteinte dans chaque direction. En d'autres termes, la masse manquante est attribuée aux modes connus (modes sélectionnés par l'utilisateur dans l'analyse). Ensuite, les déformations et les forces modales peuvent être calculées. Pour finir, les résultats sont combinés à l'aide de la méthode sélectionnée SRSS, CQC ou MAX.



Simplement dans ce cas 70%, 20% et 90% des masses sont ajoutées.

Ce principe est expliqué avec l'exemple précédent.

Au lieu de l'option 'masse participante seule', l'option 'masse manquante dans les modes' est choisie

Comme résultat de l'exemple précédent, les valeurs des masses effectives sont :

(j) units	Mef_x [kg]	Mef_y [kg]	Mef_z [kg]
1	12,346	3131,374	103,182
2	404,603	14,533	31,517

Les masses dans les nœuds libres sont :

node	mass x [kg]	mass y [kg]	mass z [kg]
N2	646,875	646,875	646,875
N4	646,875	646,875	646,875
N5	787,5	787,5	787,5
N7	1537,5	1537,5	1537,5
total	3618,75	3618,75	3618,75

Après avoir comparé les masses réelles et les masses effectives dans chaque direction, on peut conclure qu'il 'manque' des masses dans l'analyse des vibrations.

Prenez par exemple les masses dans la direction X :

$$M_{miss} = 3618,75kg - 416,95kg = 3201,80kg$$

$$R_{miss} = \frac{M_{miss}}{M_{eff}} = \frac{3201,80kg}{416,95kg} = 7,679$$

$$M_{miss,1} = 7,679 \cdot 12,346kg = 94,8kg$$

$$M_{miss,2} = 7,679 \cdot 404,603kg = 3107kg$$

	x	y	z
Mtot	3618,75	3618,75	3618,75
Meff	416,95	3145,91	134,70
Mmiss	3201,80	472,84	3484,05
r_miss	7,679	0,150	25,865

(j)	Mmis_x(j) [kg]	Mmis_y(j) [kg]	Mmis_z(j) [kg]
1	94,8	470,7	2668,8
2	3107,0	2,2	815,2

- Calcul du **facteur de participation pour la masse manquante** :

$$\gamma_{miss,k,j} = \text{sign}\{\gamma_{k,j}\} \cdot (\sqrt{M_{miss,k,j} + M_{eff,k,j}} - |\gamma_{k,j}|)$$

Par exemples, pour le mode 1 dans la direction X:

$$\Rightarrow \gamma_{miss,x,(1)} = -(\sqrt{94,8kg + 12,346kg} - |-3,514|) = -6,8$$

(j)	$\gamma_{miss\_x(j)}$ [kg <sup>0.5</sup> ]	$\gamma_{miss\_y(j)}$ [kg <sup>0.5</sup> ]	$\gamma_{miss\_z(j)}$ [kg <sup>0.5</sup> ]
1	-6,8	4,1	42,5
2	39,1	-0,3	23,5

- Pour prendre en compte la masse manquante dans le calcul, le facteur de participation est inclus dans la formule pour le **coefficient de mode G** :

$$G_{k,(j)} = \frac{Sa_{k,(j)} \times \gamma_{k,(j)} + Sa_{cutoff,k} \times \gamma_{k,(j)}^{ms}}{\omega_{(j)}^2}$$

Avec Sa\_cutoff: accélération de la fréquence de 'coupure' dans la direction k (i.e. dernière fréquence calculée).

Pour le mode1 dans la direction X:

$$\Rightarrow G_{x,(1)} = \frac{2 \cdot -3,514 + 2 \cdot -6,8}{166,4} = -0,124$$

(j)	G_x [m*kg <sup>0.5</sup> ]	G_y [m*kg <sup>0.5</sup> ]	G_z [m*kg <sup>0.5</sup> ]	G [m*kg <sup>0.5</sup> ]
1	-0,124	0,721	0,633	1,230
2	0,525	-0,036	0,258	0,746

- A partir de maintenant, la même procédure que dans la méthode normale peut être suivie. La formule qui donne la **force latérale** dans chaque nœud est :

$$F_{i,k(j)} = m_{i,k(j)} \cdot \ddot{u}_{i,k(j)} = m_{i,k(j)} \cdot G_{(j)} \cdot \phi_{i,k(j)} \cdot \omega_{(j)}^2$$

$$\Rightarrow F_{N2,x,(1)} = \frac{(646,875 \cdot 1,23 \cdot (-12,67) \cdot 166,4)}{10000} = -167,7N$$

**mode 1**

node	F_x [N]	F_y [N]	F_z [N]
2	-167,7	2005,8	5,6
4	-103,0	2005,8	-4,8
5	-203,9	2519,9	2077,5
7	-244,5	4919,4	0,3
summ	-719,0	11450,9	2078,6

**mode 2**

node	F_x [N]	F_y [N]	F_z [N]
2	1457,5	-2146,5	-1,1
4	46,8	-2146,5	2,4
5	1774,1	1236,6	945,1
7	111,7	2414,0	-0,3
summ	3390,1	-642,5	946,2

- Ensuite, l'effort de cisaillement à la base est calculé :

$$F_{k,(j)} = \sum_i F_{i,k,(j)}$$

(j) units	F_x [kN]	F_y [kN]	F_z [kN]
1	-0,7190	11,4509	2,0786
2	3,3901	-0,6425	0,9462
summ	3,47	11,47	2,28

- Calcul du moment de renversement. La hauteur de renversement est 0 :

$$M_{i,k(i)} = F_{i,k(i)} \cdot z_i$$

**mode 1**

node	M_x [Nm]	M_y [Nm]
2	-10029,1	838,6
4	-10029,1	514,9
5	-12599,3	1019,3
7	-24597,0	1222,3

**mode 2**

node	M_x [Nm]	M_y [Nm]
2	10732,7	-7287,6
4	10732,7	-233,9
5	-6182,9	-8870,5
7	-12070,1	-558,4

- La somme de ces moments donne le **moment de renversement à la base** :

(j) units	M_x [kN]	M_y [kN]
1	-57,2545	3,5950
2	3,2124	-16,9504
summ	57,34	17,33

- Aussi, les **déplacements modaux** peuvent être calculés pour chaque nœud :

$$\mathbf{u}_{i,k(j)} = \mathbf{G}_{(j)} * \phi_{k(j)}$$

**mode 1**

node	ux [mm]	uy [mm]	uz [mm]
2	-1,56	18,63	0,05
4	-0,96	18,63	-0,04
5	-1,56	19,23	15,85
7	-0,96	19,23	0,00

**mode 2**

node	ux [mm]	uy [mm]	uz [mm]
2	9,98	-14,70	-0,01
4	0,32	-14,70	0,02
5	9,98	6,95	5,31
7	0,32	6,95	0,00

**summ**

node	ux [mm]	uy [mm]	uz [mm]
2	10,10	23,73	0,05
4	1,01	23,73	0,05
5	10,10	20,45	16,72
7	1,01	20,45	0,00

- Les **accélérations modales** sont :

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i,k(j)} = \omega_{(j)}^2 * \mathbf{G}_{(j)} * \phi_{k(j)}$$

**mode 1**

node	ax [mm/sec <sup>2</sup> ]	ay [mm/sec <sup>2</sup> ]	az [mm/sec <sup>2</sup> ]
2	-259,3	3100,8	8,6
4	-159,2	3100,8	-7,4
5	-258,9	3199,8	2638,1
7	-159,0	3199,6	0,2

**mode 2**

node	ax [mm/sec <sup>2</sup> ]	ay [mm/sec <sup>2</sup> ]	az [mm/sec <sup>2</sup> ]
2	2253,2	-3318,3	-1,7
4	72,3	-3318,3	3,7
5	2252,8	1570,3	1200,2
7	72,6	1570,1	-0,2

**summ**

node	ax [mm/sec <sup>2</sup> ]	ay [mm/sec <sup>2</sup> ]	az [mm/sec <sup>2</sup> ]
2	2268,0	4541,6	8,8
4	174,9	4541,6	8,2
5	2267,7	3564,3	2898,3
7	174,8	3564,1	0,3

De façon analogue à l'exemple précédent, ces déplacements pour chaque mode sont transformés en deux cas de charge. Pour ces cas de charge, les efforts internes sont analysés :

Member	Case	dx [m]	N [kN]	Vy [kN]	Vz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
B1	LC3	0	7,15	-2,2	0,58	0,02	-0,8	5,62
B1	LC3	5	7,15	-2,2	0,58	0,02	2,1	-5,4
B2	LC3	0	-6,1	-2,2	-0,06	0,02	0,2	5,61
B2	LC3	5	-6,1	-2,2	-0,06	0,02	-0,1	-5,4
B3	LC3	0	1,01	-7,05	-1,26	0,46	10,62	30,8
B3	LC3	5	1,01	-7,05	-1,26	0,46	4,34	-4,46
B4	LC3	0	0	0,57	0,13	-7,24	-2,41	-0,66
B4	LC3	3	0	0,57	0,13	-7,24	-2,02	1,05
B5	LC3	0	0	-0,21	-1,94	2,41	4,39	0,57
B5	LC3	6	0	-0,21	-1,94	2,41	-7,24	-0,66
B6	LC3	0	0	-0,19	0,88	2,44	-2,39	0,55
B6	LC3	6	0	-0,19	0,88	2,44	2,9	-0,59
B7	LC3	0	0	0,38	-5,22	-2,29	7,81	-0,59
B7	LC3	3	0	0,38	-5,22	-2,29	-7,84	0,57

Member	Case	dx [m]	N [kN]	Vy [kN]	Vz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
B1	LC4	0	-1,04	1,78	1,39	-0,59	-3,36	-4,51
B1	LC4	5	-1,04	1,78	1,39	-0,59	3,6	4,42
B2	LC4	0	2,28	1,79	0,06	-0,63	-0,13	-4,51
B2	LC4	5	2,28	1,79	0,06	-0,63	0,16	4,42
B3	LC4	0	-0,29	-2,93	1,93	-8,65	-6,01	11,76
B3	LC4	5	-0,29	-2,93	1,93	-8,65	3,66	-2,88
B4	LC4	0	0	-2,1	-0,31	-3,52	-0,96	-0,5
B4	LC4	3	0	-2,1	-0,31	-3,52	-1,89	-6,8
B5	LC4	0	0	-0,21	-1,25	0,96	4	0,79
B5	LC4	6	0	-0,21	-1,25	0,96	-3,52	-0,5
B6	LC4	0	0	-0,51	0,02	0,98	-0,24	1,2
B6	LC4	6	0	-0,51	0,02	0,98	-0,14	-1,85
B7	LC4	0	0	0,26	2,3	-0,4	-3,45	-0,21
B7	LC4	3	0	0,26	2,3	-0,4	3,44	0,57

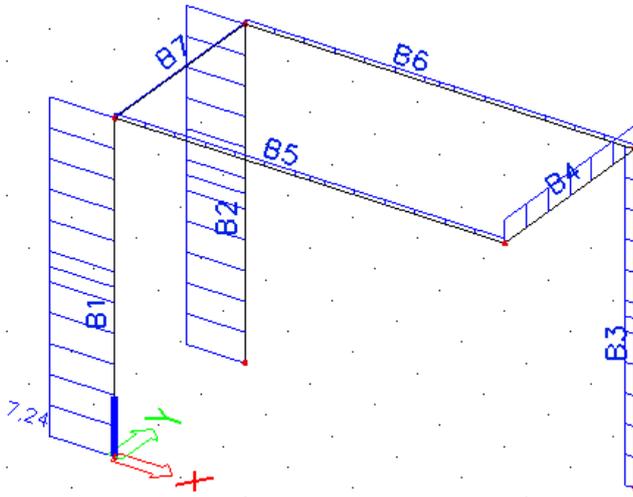
Calcul de l'effort normal pour la barre B1 selon le principe SRSS :

$$\Rightarrow N = \sqrt{(7,15kN)^2 + (-1,04kN)^2} = 7,23kN$$

Les autres efforts internes sont calculés de la même manière :

Member	Case	dx [m]	N [kN]	Vy [kN]	Vz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
B1	LC2	0,00	7,23	2,83	1,51	0,59	3,45	7,21
B1	LC2	5,00	7,23	2,83	1,51	0,59	4,17	6,98
B2	LC2	0,00	6,51	2,84	0,08	0,63	0,24	7,20
B2	LC2	5,00	6,51	2,84	0,08	0,63	0,19	6,98
B3	LC2	0,00	1,05	7,63	2,30	8,66	12,20	32,97
B3	LC2	5,00	1,05	7,63	2,30	8,66	5,68	5,31
B4	LC2	0,00	0,00	2,18	0,34	8,05	2,59	0,83
B4	LC2	3,00	0,00	2,18	0,34	8,05	2,77	6,88
B5	LC2	0,00	0,00	0,30	2,31	2,59	5,94	0,97
B5	LC2	6,00	0,00	0,30	2,31	2,59	8,05	0,83
B6	LC2	0,00	0,00	0,54	0,88	2,63	2,40	1,32
B6	LC2	6,00	0,00	0,54	0,88	2,63	2,90	1,94
B7	LC2	0,00	0,00	0,46	5,70	2,32	8,54	0,63
B7	LC2	3,00	0,00	0,46	5,70	2,32	8,56	0,81

Cela correspond aux résultats pour le cas de charge sismique dans SCIA Engineer :

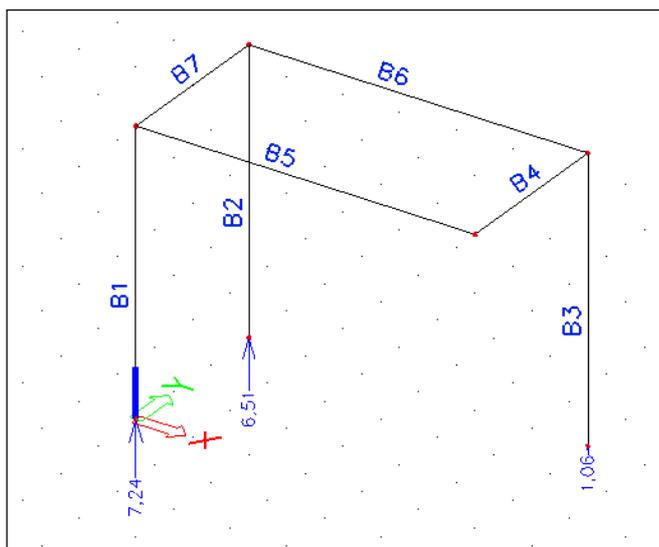


Support	Case	Rx [kN]	Ry [kN]	Rz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
Sn1/N1	LC3	-0,58	-2,2	-7,15	5,62	-0,8	0,02
Sn2/N6	LC3	1,26	-7,05	-1,01	30,8	10,62	0,46
Sn3/N3	LC3	0,06	-2,2	6,1	5,61	0,2	0,02

Support	Case	Rx [kN]	Ry [kN]	Rz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
Sn1/N1	LC4	-1,39	1,78	1,04	-4,51	-3,36	-0,59
Sn2/N6	LC4	-1,93	-2,93	0,29	11,76	-6,01	-8,65
Sn3/N3	LC4	-0,06	1,79	-2,28	-4,51	-0,13	-0,63

Support	Case	Rx [kN]	Ry [kN]	Rz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
Sn1/N1	LC2	1,51	2,83	7,23	7,21	3,45	0,59
Sn2/N6	LC2	2,30	7,63	1,05	32,97	12,20	8,66
Sn3/N3	LC2	0,08	2,84	6,51	7,20	0,24	0,63

Cela correspond aux réactions dans SCIA Engineer :

Calcul de  $R_z$  pour LC2

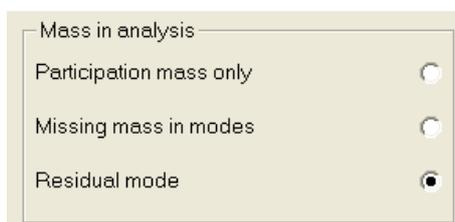
### Exemple 12: Spectral\_Analysis\_Residual mode .esa

Le principe de la méthode du mode résiduel est semblable à celui de la méthode de la masse manquante:

S'il n'y a pas assez de masse prise en compte avec la méthode standard, des masses seront ajoutées pour satisfaire aux recommandations de l'EC.

L'objectif de cette méthode est d'évaluer la masse manquante comme un mode supplémentaire, calculé comme un cas de charge statique équivalent. Le cas de charge statique représente le poids de la masse manquante avec accélération de coupure. Finalement, les résultats sont combinés à l'aide de la méthode sélectionnée SRSS, CQC, MAX.

Cela est possible avec l'option suivante:



La différence par rapport à la méthode précédente est que la masse manquante est prise dans l'analyse sismique comme un mode supplémentaire représentant le poids de la masse manquante. Ce mode est calculé en considérant un cas de charge statique équivalent.

Les masses effectives sont calculées séparément pour chaque nœud. Dans l'autre méthode, la masse effective a été déterminée pour chaque direction dans chaque mode. Maintenant, ce paramètre sera calculé pour chaque nœud dans les directions X, Y et Z pour chaque mode. Plus tard, cette masse manquante sera prise en compte par l'intermédiaire d'un cas de charge supplémentaire.

La masse effective dans un nœud:

$$M_{eff,k,(j),i} = \frac{M_{k,i} \cdot \varphi_{k,(j),i} \cdot M_{eff,k,(j)}}{1000 \cdot \gamma_{k,j}}$$

Calcul de la masse effective dans la direction X pour le mode 1 et N2:

$$\Rightarrow M_{eff,N2,x,(1)} = \frac{646,875kg \cdot (-12,67) \cdot 12,346}{10000 \cdot (-3,514)} = 2,9$$

effective mass in node (direction k, mode j)

mode 1	mass x [kg]	mass y [kg]	mass z [kg]
N2	2,9	548,5	0,3
N4	1,8	548,5	-0,2
N5	3,5	689,1	103,1
N7	4,2	1345,3	0,0
	12,346	3131,374	103,182

mode2	mass x [kg]	mass y [kg]	mass z [kg]
N2	174,0	48,6	0,0
N4	5,6	48,6	0,1
N5	211,7	-28,0	31,5
N7	13,3	-54,6	0,0
	404,60	14,53	31,52

mode 1 & 2	mass x [kg]	mass y [kg]	mass z [kg]
N2	176,8	597,1	0,2
N4	7,4	597,1	-0,2
N5	215,2	661,1	134,6
N7	17,5	1290,7	0,0
	416,9494	3145,9065	134,6994

- La masse manquante est la différence entre la masse totale pour chaque nœud et la masse effective :

$$\Rightarrow \text{Missing mass}_{N2,x} = 646,9 - 176,8 = 470kg$$

	mass x [kg]	mass y [kg]	mass z [kg]
N2	470,0	49,8	646,6
N4	639,5	49,8	647,0
N5	572,3	126,4	652,9
N7	1520,0	246,8	1537,5

- Avec ces masses manquantes, les cas de charge sont générés en utilisant la formule :

$$\Rightarrow \text{Load case}_{i,k} = \text{Missing mass}_{i,k} \cdot S_{k,(cutoff)}$$

	F x [kN]	F y [kg]	F z [kg]
N2	0,940	0,100	1,293
N4	1,279	0,100	1,294
N5	1,145	0,253	1,306
N7	3,040	0,494	3,075
summ	6,4036	0,9457	6,9681

Remarque :

L'accélération de coupure est l'accélération de la fréquence de coupure. Il s'agit de la dernière fréquence calculée.

- Calcul du coefficient de mode :

$$G_{k,(j)} = \frac{S a_{k,(j)} \times \gamma_{k,(j)}}{\omega_{(j)}^2}$$

$$\Rightarrow G_{x,(1)} = \frac{2 \frac{m}{s^2} \cdot -3,514 kg^{1/2}}{166,4 \frac{1}{s^2}} = -0,042 m \cdot kg^{1/2}$$

(j)	G_x [m*kg <sup>0.5</sup> ]	G_y [m*kg <sup>0.5</sup> ]	G_z [m*kg <sup>0.5</sup> ]	G [m*kg <sup>0.5</sup> ]
1	-0,042	0,673	0,122	0,752
2	0,178	-0,034	0,050	0,194

- Calcul des forces latérales :

$$F_{i,k,(j)} = m_{i,k,(j)} \cdot \ddot{u}_{i,k,(j)} = m_{i,k,(j)} \cdot G_{(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)} \cdot \omega_{(j)}^2$$

$$\Rightarrow F_{1,x,(1)} = \frac{646,9 kg \cdot 0,75 m \cdot kg^{1/2} \cdot -12,67 mm \cdot 166 \frac{1}{s^2}}{10000} = -102,6 N$$

#### mode 1

node	F_x(1) [N]	F_y(1) [N]	F_z(1) [N]
2	-102,6	1227,3	3,4
4	-63,0	1227,3	-2,9
5	-124,7	1541,8	1271,1
7	-149,6	3010,0	0,2
summ	-439,9	7006,3	1271,8

#### mode 2

node	F_x(1) [N]	F_y(1) [N]	F_z(1) [N]
2	379,1	-558,3	-0,3
4	12,2	-558,3	0,6
5	461,4	321,6	245,8
7	29,0	627,8	-0,1
summ	881,7	-167,1	246,1

- Calcul de l'effort de cisaillement à la base :

$$F_{k,(j)} = \sum_i F_{i,k,(j)} l$$

(j) units	F_x [kN]	F_y [kN]	F_z [kN]
1	-0,4399	7,0063	1,2718
2	0,8817	-0,1671	0,2461
R	6,4036	0,9457	6,9681
summ	6,5	7,1	7,1

- Le moment de renversement dans chaque nœud est calculé comme suit :

$$M_{i,ki(j)} = F_{i,k,(j)} * z_i$$

La hauteur  $z_i$  est égale à la hauteur du nœud concerné moins la hauteur de renversement. Dans ce cas, la hauteur de renversement est égale à zéro.

#### mode 1

node	M_x(1) [Nm]	M_y(1) [Nm]
2	-6136,4	513,1
4	-6136,4	315,1
5	-7709,0	623,6
7	-15049,9	747,9

#### mode 2

node	M_x(2) [Nm]	M_y(2) [Nm]
2	2791,4	-1895,4
4	2791,4	-60,8
5	-1608,1	-2307,1
7	-3139,2	-145,2

Dans ce cas, un moment de renversement supplémentaire est calculé pour le cas de charge résiduel :

$$\Rightarrow M_{N2,y,(1)} = 0,94kN \cdot (5m - 0m) = -4,7Nm$$

#### mode R

node	M_x(1) [Nm]	M_y(1) [Nm]
2	0,0	-4,7
4	0,0	-6,4
5	0,0	-5,7
7	0,0	-15,2

La lettre R représente le mode résiduel.

- Pour chaque mode, la somme des moments de renversement est calculée, par la suite les résultats sont combinés avec la méthode SRSS :

(j) units	M_x [kN]	M_y [kN]
1	-35,0317	2,1997
2	0,8355	-4,4085
R	0,0000	-32,0180
summ	35,0	32,4

- Calcul du déplacement modal:

$$u_{i,k,(j)} = G_{(j)} * \varphi_{k,(j)}$$

**mode 1**

node	ux [mm]	uy [mm]	uz [mm]
2	-0,95	11,40	0,03
4	-0,59	11,40	-0,03
5	-0,95	11,77	9,70
7	-0,58	11,77	0,00

**mode 2**

node	ux [mm]	uy [mm]	uz [mm]
2	2,60	-3,82	0,00
4	0,08	-3,82	0,00
5	2,59	1,81	1,38
7	0,08	1,81	0,00

Pour calculer les déformations pour le mode R, les cas de charge générés par les masses manquantes sont introduits comme des cas de charge réels aux nœuds de la structure. Cela donne le tableau suivant :

**2. Deformation of nodes**

Linear calculation, Extreme : Node				
Selection : All				
Load cases : LC3				
Node	Case	Ux [mm]	Uy [mm]	Uz [mm]
N1	LC3	0	0	0
N2	LC3	4,14	4,91	0,03
N3	LC3	0	0	0
N4	LC3	1,46	4,91	0
N5	LC3	4,14	8,25	6,74
N6	LC3	0	0	0
N7	LC3	1,45	8,25	0

Les déformations pour chaque mode (mode 1, mode 2 et mode R) sont combinés avec la méthode SRSS :

**summ**

node	ux [mm]	uy [mm]	uz [mm]
2	4,98	12,99	0,04
4	1,58	12,99	0,03
5	4,98	14,48	11,89
7	1,57	14,48	0,00

- La même chose pour l'accélération modale :

$$\ddot{u}_{i,k,(j)} = \omega_{(j)}^2 * G_{(j)} * \phi_{k,(j)}$$

node	ax [mm/sec2]	ay [mm/sec2]	az [mm/sec2]
2	-158,6	1897,2	5,3
4	-97,4	1897,2	-4,5
5	-158,4	1957,8	1614,2
7	-97,3	1957,7	0,1

**mode 2**

node	ax [mm/sec2]	ay [mm/sec2]	az [mm/sec2]
2	586,0	-863,0	-0,4
4	18,8	-863,0	1,0
5	585,9	408,4	312,1
7	18,9	408,4	0,0

Pour le mode R la valeur constante de 2000 mm/s<sup>2</sup> est utilisée :

**mode R**

node	ax [mm/sec2]	ay [mm/sec2]	az [mm/sec2]
2	2000,0	2000,0	2000,0
4	2000,0	2000,0	2000,0
5	2000,0	2000,0	2000,0
7	2000,0	2000,0	2000,0

Cela donne avec la méthode SRSS :

**summ**

node	ax [mm/sec2]	ay [mm/sec2]	az [mm/sec2]
2	2090,1	2888,7	2000,0
4	2002,5	2888,7	2000,0
5	2090,1	2828,4	2589,0
7	2002,5	2828,3	2000,0

- De la même manière que pour la 'méthode masse manquante' les déformations calculées sont introduites sur la structure comme des cas de charge réels. Cela donne les efforts internes suivants :

## Mode 1 :

Linear calculation, Extreme : Member, System : Principal								
Selection : All								
Load cases : LC3								
Member	Case	dx [m]	N [kN]	Vy [kN]	Vz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
B1	LC3	0	4,38	-1,35	0,36	0,01	-0,49	3,44
B1	LC3	5	4,38	-1,35	0,36	0,01	1,29	-3,3
B2	LC3	0	-3,73	-1,35	-0,04	0,01	0,12	3,44
B2	LC3	5	-3,73	-1,35	-0,04	0,01	-0,06	-3,3
B3	LC3	0	0,62	-4,32	-0,78	0,28	6,54	18,85
B3	LC3	5	0,62	-4,32	-0,78	0,28	2,65	-2,73
B4	LC3	0	0	0,35	0,08	-4,43	-1,48	-0,4
B4	LC3	3	0	0,35	0,08	-4,43	-1,24	0,63
B5	LC3	0	0	-0,12	-1,19	1,48	2,69	0,35
B5	LC3	6	0	-0,12	-1,19	1,48	-4,43	-0,4
B6	LC3	0	0	-0,12	0,54	1,49	-1,46	0,33
B6	LC3	6	0	-0,12	0,54	1,49	1,78	-0,36
B7	LC3	0	0	0,23	-3,19	-1,4	4,78	-0,35
B7	LC3	3	0	0,23	-3,19	-1,4	-4,8	0,34

## Mode 2 :

Linear calculation, Extreme : Member, System : Principal								
Selection : All								
Load cases : LC4								
Member	Case	dx [m]	N [kN]	Vy [kN]	Vz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
B1	LC4	0	-0,27	0,46	0,36	-0,15	-0,88	-1,17
B1	LC4	5	-0,27	0,46	0,36	-0,15	0,94	1,15
B2	LC4	0	0,59	0,46	0,01	-0,16	-0,03	-1,17
B2	LC4	5	0,59	0,46	0,01	-0,16	0,04	1,15
B3	LC4	0	-0,08	-0,77	0,49	-2,26	-1,52	3,07
B3	LC4	5	-0,08	-0,77	0,49	-2,26	0,94	-0,76
B4	LC4	0	0	-0,55	-0,08	-0,91	-0,25	-0,12
B4	LC4	3	0	-0,55	-0,08	-0,91	-0,5	-1,78
B5	LC4	0	0	-0,05	-0,33	0,25	1,04	0,2
B5	LC4	6	0	-0,05	-0,33	0,25	-0,91	-0,12
B6	LC4	0	0	-0,13	0,01	0,26	-0,06	0,31
B6	LC4	6	0	-0,13	0,01	0,26	-0,03	-0,48
B7	LC4	0	0	0,06	0,6	-0,1	-0,9	-0,05
B7	LC4	3	0	0,06	0,6	-0,1	0,89	0,14

Mode R :

Linear calculation, Extreme : No, System : Principal Selection : All Load cases : LC3								
Member	Case	dx [m]	N [kN]	Vy [kN]	Vz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
B1	LC3	0	4,232	-0,575	0,824	-0,134	-1,804	1,47
B1	LC3	5	4,232	-0,575	0,824	-0,134	2,314	-1,402
B2	LC3	0	-0,061	-0,574	0,244	-0,144	-0,559	1,47
B2	LC3	5	-0,061	-0,574	0,244	-0,144	0,661	-1,401
B3	LC3	0	2,798	-3,078	5,79	-2,301	-22,431	13,299
B3	LC3	5	2,798	-3,078	5,79	-2,301	6,521	-2,093
B4	LC3	0	-1,406	-1,192	0,005	-4,714	-1,048	0,818
B4	LC3	3	-1,406	-1,192	0,005	-4,714	-1,033	-2,759
B5	LC3	0	0,159	0,242	-1,301	1,048	3,092	-0,632
B5	LC3	6	0,159	0,242	-1,301	1,048	-4,714	0,818
B6	LC3	0	-1,527	0,164	-0,282	1,061	-0,117	-0,525
B6	LC3	6	-1,527	0,164	-0,282	1,061	-1,807	0,457
B7	LC3	0	0,039	-0,478	-1,637	-0,778	2,45	0,766
B7	LC3	3	0,039	-0,478	-1,637	-0,778	-2,461	-0,669

La combinaison selon la méthode SRSS donne :

Member	Case	dx [m]	N [kN]	Vy [kN]	Vz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
B1	LC2	0,00	6,10	1,54	0,97	0,20	2,07	3,92
B1	LC2	5,00	6,10	1,54	0,97	0,20	2,81	3,77
B2	LC2	0,00	3,78	1,54	0,25	0,22	0,57	3,92
B2	LC2	5,00	3,78	1,54	0,25	0,22	0,66	3,77
B3	LC2	0,00	2,87	5,36	5,86	3,24	23,41	23,27
B3	LC2	5,00	2,87	5,36	5,86	3,24	7,10	3,52
B4	LC2	0,00	1,41	1,36	0,11	6,53	1,83	0,92
B4	LC2	3,00	1,41	1,36	0,11	6,53	1,69	3,34
B5	LC2	0,00	0,16	0,27	1,79	1,83	4,23	0,75
B5	LC2	6,00	0,16	0,27	1,79	1,83	6,53	0,92
B6	LC2	0,00	1,53	0,24	0,61	1,85	1,47	0,69
B6	LC2	6,00	1,53	0,24	0,61	1,85	2,54	0,75
B7	LC2	0,00	0,04	0,53	3,64	1,60	5,45	0,84
B7	LC2	3,00	0,04	0,53	3,64	1,60	5,47	0,76

- Les réactions sont :

Mode 1:

Linear calculation, Extreme : Node Selection : All Load cases : LC3							
Support	Case	Rx [kN]	Ry [kN]	Rz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
Sn1/N1	LC3	-0,36	-1,35	-4,38	3,44	-0,49	0,01
Sn2/N6	LC3	0,78	-4,32	-0,62	18,85	6,54	0,28
Sn3/N3	LC3	0,04	-1,35	3,73	3,44	0,12	0,01

Mode 2:

Linear calculation, Extreme : Node							
Selection : All							
Load cases : LC4							
Support	Case	Rx [kN]	Ry [kN]	Rz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
Sn1/N1	LC4	-0,36	0,46	0,27	-1,17	-0,88	-0,15
Sn2/N6	LC4	-0,49	-0,77	0,08	3,07	-1,52	-2,26
Sn3/N3	LC4	-0,01	0,46	-0,59	-1,17	-0,03	-0,16

Mode R:

Linear calculation, Extreme : Node							
Selection : All							
Load cases : LC3							
Support	Case	Rx [kN]	Ry [kN]	Rz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
Sn1/N1	LC3	-0,82	-0,575	-4,232	1,47	-1,804	-0,134
Sn2/N6	LC3	-5,79	-3,078	-2,798	13,299	-22,431	-2,301
Sn3/N3	LC3	-0,24	-0,574	0,061	1,47	-0,559	-0,144

SRSS:

Support	Case	Rx [kN]	Ry [kN]	Rz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
Sn1/N1	LC2	0,97	1,54	6,10	3,92	2,07	0,20
Sn2/N6	LC2	5,86	5,36	2,87	23,27	23,41	3,24
Sn3/N3	LC2	0,25	1,54	3,78	3,92	0,57	0,22

**Remarque :**

*Dans le cas de la méthode CQC, nous ne supposons aucune corrélation avec les autres modes (la valeur absolue est ajoutée)*

*La fréquence de coupure est la fréquence du dernier mode dans l'analyse. Il est de la responsabilité de l'utilisateur de sélectionner le bon nombre de modes. Cela peut être fait dans Configuration > Solveur.*

## 4.5 Superposition modale

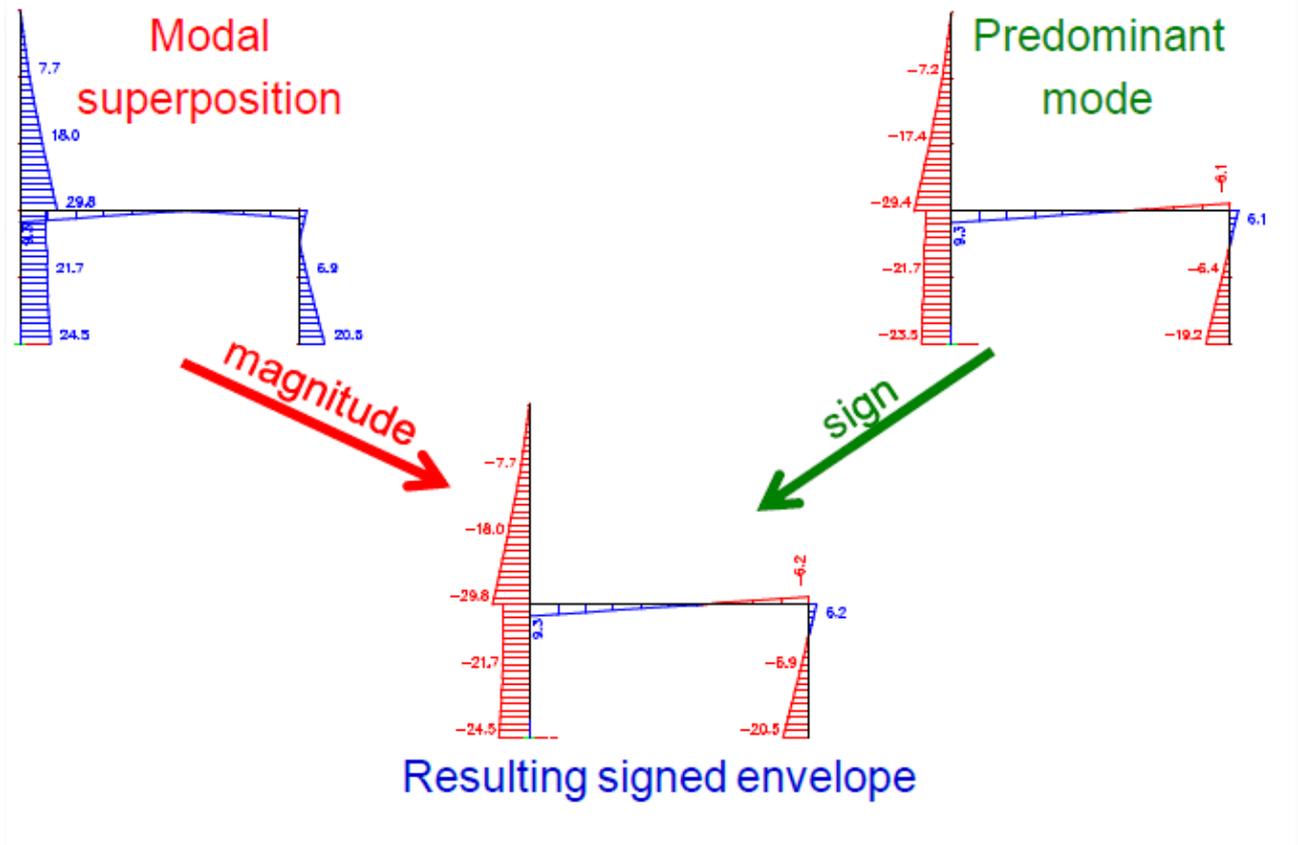
La méthode du spectre de réponse utilise une superposition modale des modes propres pertinents de la structure. Les méthodes qui sont utilisées pour la superposition modales sont celles décrites au début du chapitre : SRSS ou CQC.

Ces méthodes offrent l'avantage de fournir très facilement les valeurs de calcul de tous les résultats (déplacements, efforts internes, etc.). Néanmoins les informations disponibles sont partielles :

- il est possible de déterminer les valeurs min et max probables de tous les résultats ;
- le signe réel d'un résultat ne peut pas être défini
- la concomitance de différents résultats ne peut pas être définie.

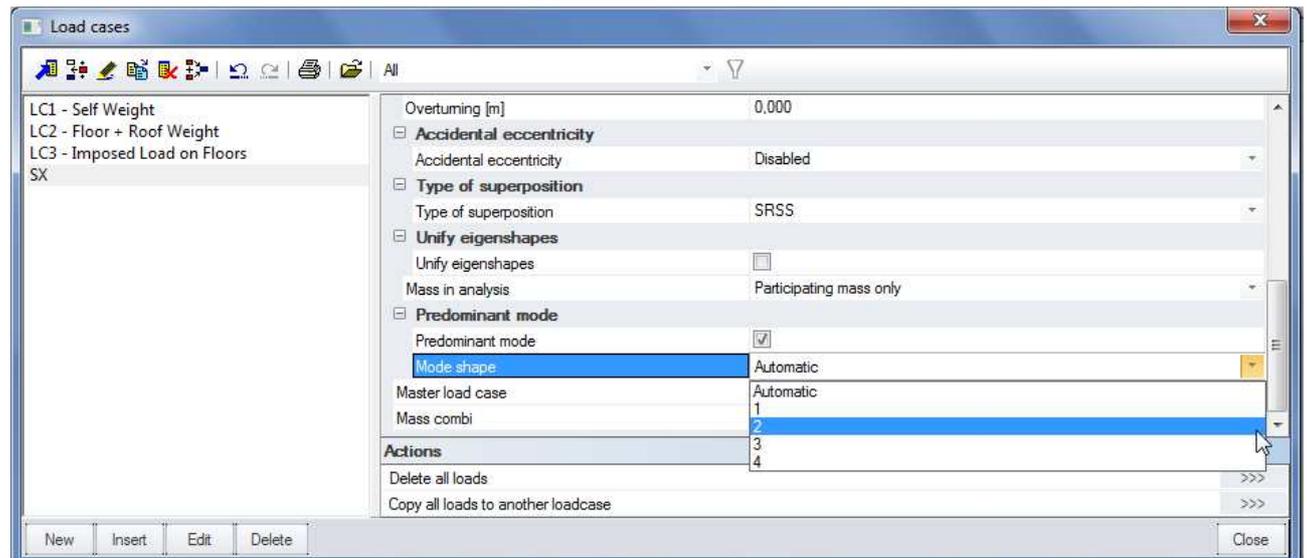
La perte de concomitance et de signature des résultats est typiquement un problème lors du calcul d'efforts résultants dans les refends parasismiques : il n'est pas possible de calculer une résultante à partir d'efforts internes issus de la superposition modale, les résultats bruts étant tous positifs. Le calcul des efforts résultants pour l'un des refends représentés ci-dessous donnerait typiquement des moments presque nuls ainsi que des efforts normaux extrêmement surestimés.

Pour obtenir des valeurs d'efforts résultants utilisables, il existe la méthode dite des « résultats signés ». Elle consiste à appliquer un schéma de signature aux résultats bruts de la superposition modale. Une approche classique consiste à utiliser les signes du mode propre le plus significatif.



Si l'on applique cette méthode aux refends parasismiques, il est possible de « signer » les efforts internes et de les rendre ainsi utilisables pour le calcul des efforts résultants.

Vous pouvez signer les résultants dans SCIA Engineer en sélectionnant manuellement un mode de signature ou un mode déterminé par le programme. Si vous choisissez l'option Automatique, le mode qui induit le plus de masse participante est utilisé (somme des directions X, Y et Z) :



A partir de la version 2013 de SCIA Engineer, une autre méthode peut être utilisée étant donné que la méthode des résultats signés peut être perçue comme une astuce permettant d'obtenir des efforts résultants utilisables.

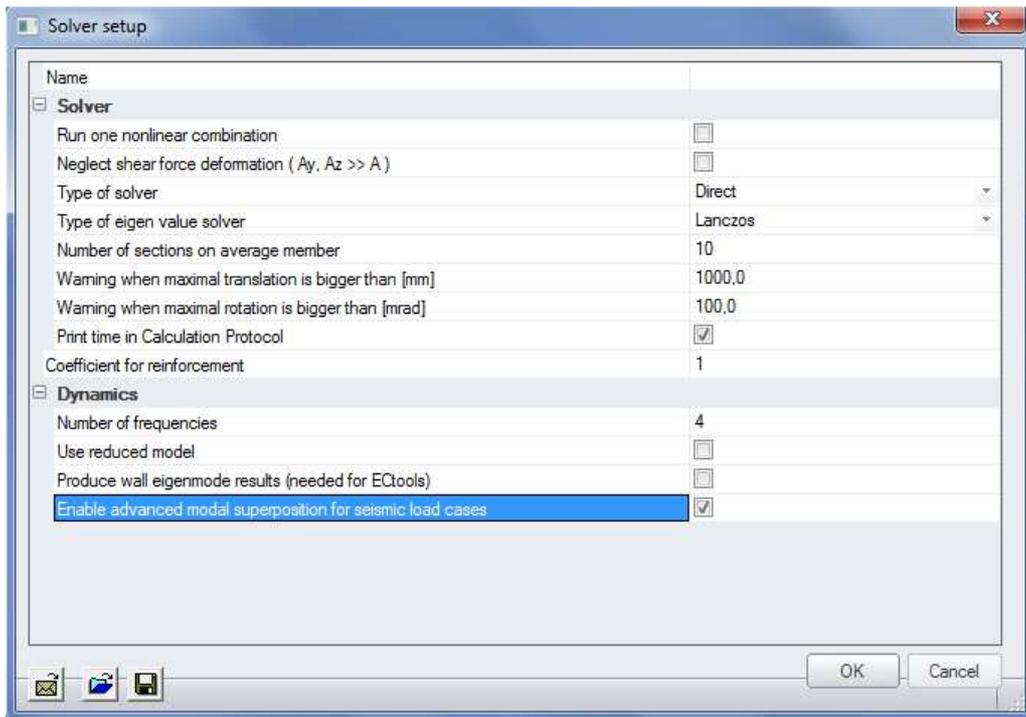
La méthode rigoureuse de calcul des résultantes dans le contexte de la méthode du spectre de réponse peut être résumée ainsi :

- calcul des efforts internes locaux pour chaque mode propre ;
- calcul séparé de l'effort résultant pour chaque mode propre ;
- application de la superposition modale aux valeurs résultantes modales obtenues.

Avec ce procédé, il n'est pas nécessaire de disposer de résultats signés pour obtenir les valeurs correctes des efforts résultants.

Il existe d'ailleurs des cas pour lesquels la méthode décrite dans le paragraphe précédent donne des résultats surestimés pour la plupart des composantes et ne peut donc être considérée que comme approximative. La méthode décrite ici est clairement plus robuste et plus précise.

**A partir de la version 2013, cette option est activée par défaut pour les nouveaux projets dans SCIA Engineer.** Pour les projets antérieurs à la version 2013, vous devez ouvrir le menu Configuration > Solveur et l'activer :



## 5. L'amortissement

Dans les chapitres précédents, nous avons vu l'influence de l'amortissement sur la réponse dynamique d'une structure. L'effet de l'amortissement est surtout significatif dans le voisinage de la résonance.

Dans ce chapitre, l'amortissement sera considéré plus en détail. La théorie sera tout d'abord présentée et ensuite nous verrons les étapes qui permettent d'introduire l'amortissement non-uniforme dans SCIA Engineer.

En utilisant les exemples du chapitre précédent, l'influence de l'amortissement sur la réponse sismique est illustrée. Le chapitre se termine avec une structure en 3D, qui prend en compte l'amortissement des différents matériaux.

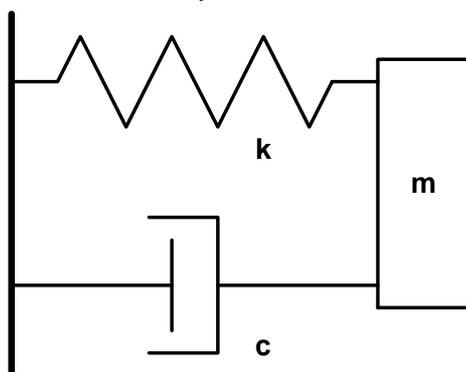
### 5.1 Théorie

L'amortissement peut avoir différentes causes. La composante qui est toujours présente est l'amortissement structurel. L'amortissement structurel est causé par l'hystérésis dans le matériau : la conversion de petites quantités d'énergie en chaleur pour chaque cycle de vibration et augmenté par la friction entre les pièces internes.

D'autres causes peuvent être le sol de fondation et l'amortissement aérodynamique du bâtiment du à la déviation de l'énergie par l'air [22]. Dans de nombreux cas, l'amortissement est augmenté en ajoutant des amortisseurs artificiels à la structure.

De la même manière que dans les chapitres précédents, la théorie est exposée. Un aperçu complet peut être trouvé dans la référence [1].

Considérons le système amorti en vibration libre suivant :



Un corps de masse  $m$  peut se déplacer dans une direction. Un ressort de raideur constante  $k$ , est fixé à une extrémité et attaché à l'autre extrémité à la masse. La masse est également soumise à un amortissement d'une capacité  $c$ .

L'équation du mouvement, en utilisant une notation matricielle peut être écrite comme suit :

$$M \cdot \ddot{x}(t) + C \cdot \dot{x}(t) + K \cdot x(t) = 0 \quad (5.1)$$

Une solution possible est du type :

$$x = A \cdot e^{st} \quad (5.2)$$

En remplaçant (5.2) dans (5.1) on obtient :

$$M \cdot s^2 \cdot A \cdot e^{st} + C \cdot s \cdot A \cdot e^{st} + K \cdot A \cdot e^{st} = 0 \quad (5.3)$$

Cette équation peut être réécrite :

$$s^2 + 2 \cdot n \cdot s + \omega_n^2 = 0 \quad (5.4)$$

$$\text{Avec : } n = \frac{C}{2M} \quad (5.5)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (5.6)$$

Les solutions possibles pour l'équation (5.4) sont :

$$s = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_n^2} \quad (5.7)$$

Il est clair que la réponse du système dépend de la valeur numérique du radical. Par conséquent, les trois possibilités suivantes doivent être considérées :

$$\begin{aligned} n &= \omega_n \\ n &< \omega_n \\ n &> \omega_n \end{aligned} \quad (5.8)$$

Cela peut être réécrit :

$$\begin{aligned} C &= 2 \cdot \sqrt{K \cdot M} \\ C &< 2 \cdot \sqrt{K \cdot M} \\ C &> 2 \cdot \sqrt{K \cdot M} \end{aligned} \quad (5.9)$$

La condition  $C = 2 \cdot \sqrt{K \cdot M} = C_c$  est appelée *amortissement critique*. Dans ce cas, le corps est restauré à l'équilibre dans les plus brefs délais, sans oscillation.

Le rapport  $\xi = \frac{C}{C_c}$  est appelé **taux d'amortissement** ou **amortissement relatif**.

En supposant que  $n = \xi \cdot \omega_n$ , l'équation (5.5) peut être écrite:

$$C = 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot M \quad (5.10)$$

Les trois possibilités de l'équation (5.8) peuvent être réécrites :

$$\begin{aligned} \xi &= 1 \\ \xi &< 1 \\ \xi &> 1 \end{aligned} \quad (5.11)$$

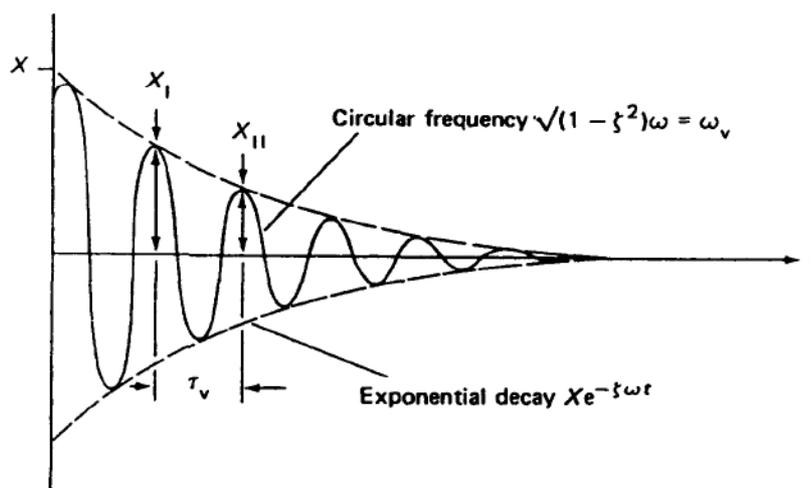
Lorsqu'on regarde les conditions  $\xi = 1$  et  $\xi > 1$ , il peut être démontré qu'il n'existe aucune solution harmonique.

Seule la condition  $\xi < 1$  donne une solution harmonique.

En introduisant la **fréquence circulaire amortie**  $\omega_D = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$ , la solution de l'équation (5.1) peut être écrite :

$$x = e^{-\xi \omega_n t} \{A \cdot \cos(\omega_D t) + B \cdot \sin(\omega_D t)\} \quad (5.12)$$

Dans le chapitre 2, cette vibration a été illustrée à travers la figure suivante :



Une façon pratique pour déterminer l'amortissement du système est de l'écrire sous forme de **décroissement logarithmique**  $\Lambda$ . Il s'agit du logarithme népérien du rapport de deux amplitudes successives dans la même direction.

$$\Lambda = \ln \frac{X_I}{X_{II}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (5.13)$$

*Remarque :*

Comme indiqué plus haut, la fréquence circulaire est réduite par l'action de l'amortissement pour obtenir la fréquence circulaire amortie. Cependant, dans de nombreux systèmes, cette réduction est faible parce que les valeurs de  $\xi$  sont généralement petites, par exemple, dans la plupart des structures d'ingénierie  $\xi$  est rarement plus grand que 0,02. Même lorsque  $\xi = 0,2$ ;  $\omega_D = 0,98 \omega_n$

L'**Annexe B** donne quelques références pour les valeurs numériques des taux d'amortissement.

## 5.2 L'amortissement dans SCIA Engineer

Dans SCIA Engineer, l'amortissement peut être spécifié sur les éléments 1D, 2D et les appuis. L'amortissement de chacun de ces éléments sera utilisé pour calculer un taux d'amortissement modal pour toute la structure pour chaque mode propre. Dans la littérature on parle d'**amortissement non uniforme**.

L'amortissement non uniforme est utilisé pour les structures en acier boulonnées partiellement, soudées partiellement, les structures mixtes acier-béton, les constructions sur sol, ...

Pour les systèmes structuraux qui se composent d'éléments avec différentes propriétés d'amortissement, la matrice d'amortissement  $C$  peut être obtenue par une superposition appropriée des matrices d'amortissement des éléments individuels :

$$C = \sum_{i=1}^N C_i \quad (5.14)$$

Avec :  $C_i$  = La matrice d'amortissement pour l' $i^{\text{ème}}$  élément dans le système de coordonnées globales.

$N$  = Le nombre d'éléments qui sont assemblés.

### L'amortissement proportionnel (Amortissement de Rayleigh)

Une façon de décrire l'amortissement consiste à supposer que la matrice d'amortissement est faite d'une combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité.

$$C_i = \alpha_i \cdot M_i + \beta_i \cdot K_i \quad (5.15)$$

Avec :

$\alpha_i$  et  $\beta_i$  = Coefficients d'Amortissement Proportionnels pour la  $i^{\text{ème}}$  partie de la structure.

$M_i$  = Matrice de masse pour la  $i^{\text{ème}}$  partie de la structure dans le système de coordonnées global.

$K_i$  = Matrice de rigidité pour la  $i^{\text{ème}}$  partie de la structure dans le système de coordonnées global.

Les Formules pour ces coefficients d'amortissement proportionnels peuvent être trouvées dans la référence [19].

Des exemples peuvent être trouvés dans la référence [20].

### Amortissement pondéré par la rigidité

Pour les structures qui se composent de sous-structures majeures ou de composants avec différentes caractéristiques d'amortissement, les valeurs composites d'amortissement peuvent être calculées en utilisant l'énergie élastique de la structure [8], [21]:

$$\xi_j = \frac{\sum_{i=1}^N \xi_i \cdot E_i}{E} \quad (5.16)$$

Avec :

$\xi_j$  = Taux d'amortissement du mode propre considéré.

$E$  = Energie élastique de la structure, associée avec le déplacement modale du mode propre considéré.

$N$  = Nombre de sous-structures.

$\xi_i$  = Taux d'amortissement de la  $i^{\text{ème}}$  sous-structure.

$E_i$  = Energie élastique de la  $i^{\text{ème}}$  sous-structure, associée avec le déplacement modal du mode propre considéré.

L'équation (5.16) peut être réécrite sous la forme suivante [19]:

$$\xi_j = \frac{\Phi_j^T \cdot \left[ \sum_{i=1}^N [\xi K]_i \right] \cdot \Phi_j}{\omega_j^2} \quad (5.17)$$

Avec :  $[\xi K]_i$  = Matrice de rigidité de la  $i^{\text{ème}}$  sous-structure dans le système de coordonnées globales, multipliée par le taux d'amortissement modal de la  $i^{\text{ème}}$  sous-structure.

#### **Remarque :**

*Cette formule peut être utilisée tant que les valeurs d'amortissement résultantes sont à moins de 20% des valeurs critiques. Si des valeurs supérieures à 20% sont calculées, des justifications sont nécessaires.*

Comme il a été précisé, dans SCIA Engineer, un taux d'amortissement peut être introduit pour chaque élément. L'amortissement du matériel à partir duquel l'élément est fabriqué peut également être utilisé.

Lorsqu'aucun taux d'amortissement n'est saisi pour un élément, une valeur par défaut sera utilisée puisque tous les éléments ont besoin d'un taux d'amortissement pour pouvoir appliquer les formules ci-dessus. Nous verrons dans l'exemple suivant comment introduire cette valeur par défaut.

De façon analogue à l'introduction des autres objets dans SCIA Engineer, les **Amortissements** seront regroupés dans un **Groupe d'Amortissement**. À son tour, ce groupe peut être attribué à une **Combinaison de Groupes de Masses**.

### Amortissement d'appui

En plus de l'amortissement des éléments 1D et 2D, SCIA Engineer permet d'introduire une valeur d'amortissement pour les appuis flexibles aux nœuds. Le taux d'amortissement modal  $\xi_j$  est calculé avec la formule suivante :

$$\xi_j = \text{Alpha} \cdot \frac{\Phi_{s,j}^T \cdot \left[ \sum_s C_s \right] \cdot \Phi_{s,j}}{4 \cdot \omega_j} \quad (5.18)$$

Avec :  $\omega_j$  = La fréquence angulaire du mode j

$\Phi_{s,j}$  = Le déplacement modal à l'appui pour le mode j

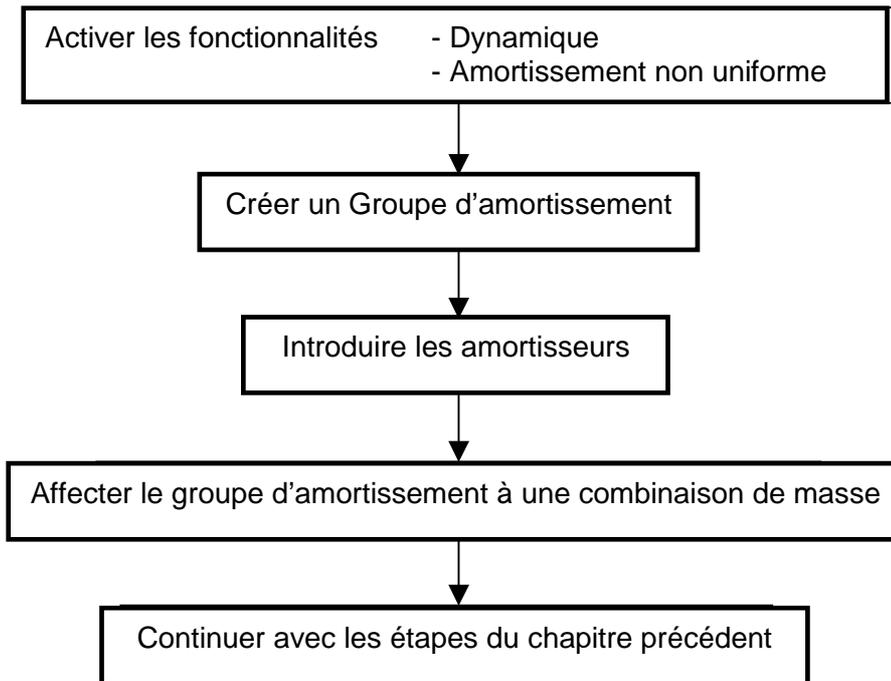
$C_s$  = La constante d'amortissement pour l'appui

*Alpha* = Un paramètre défini par l'utilisateur (> 0)

Le taux d'amortissement modal total peut alors être calculé comme la somme des équations (5.17) et (5.18).

Comme cela a déjà été précisé, l'amortissement doit être défini sur tous les éléments 1D et 2D. Ce n'est pas le cas pour les appuis : certains appuis peuvent ne pas avoir de valeur d'amortissement.

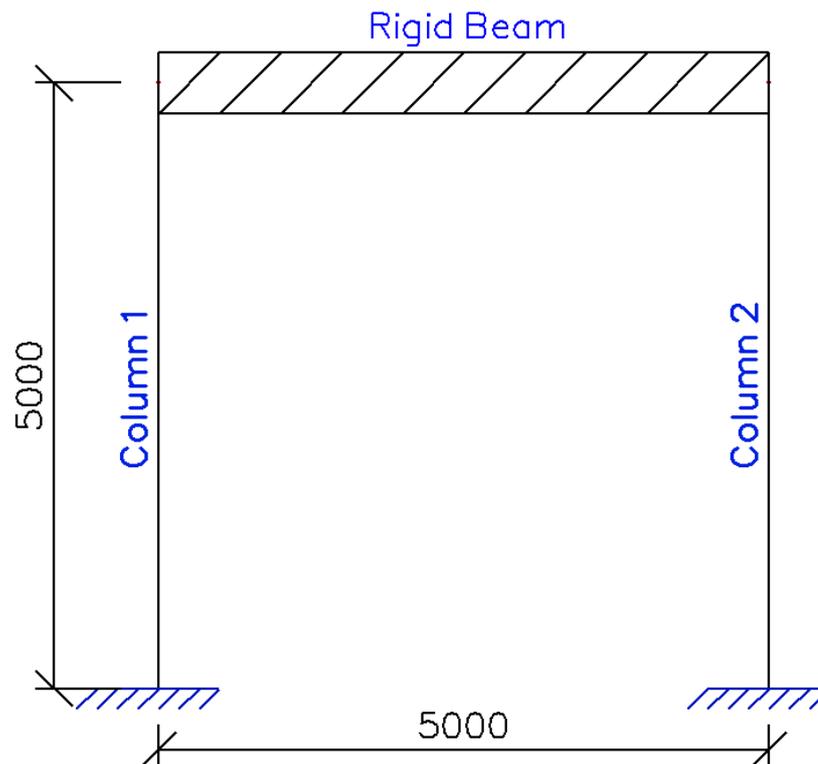
Le schéma suivant montre comment l'amortissement non uniforme est introduit dans SCIA Engineer :



L'utilisation des amortisseurs et le calcul du taux d'amortissement total seront illustrés dans les exemples suivants.

#### Exemple 10: Damping\_1.esa

Dans cet exemple, le principe de l'amortissement pondéré par la rigidité est illustré. Un portique en béton avec une poutre supposée rigide est modélisé. Dans ce cas, seuls les poteaux participent à la rigidité horizontale du portique. Le poteau de gauche a une section de forme **Rectangulaire 500 x 500**, le poteau de droite a une section de forme **Rectangulaire 350 x 350**. Les bases des poteaux sont modélisées comme rigides. Pour modéliser la poutre rigide, une section de forme **Rectangulaire 500000 x 500000** est utilisée. Pour s'assurer que cette poutre se comporte de manière rigide, dans les nœuds entre les poteaux et la poutre, nous définissons des appuis fixes en **Translation selon Z** et en **Rotation autour de Y**. La hauteur des poteaux et la longueur de la poutre sont prises égales à **5m**. Tous les éléments sont en béton **C30/37** selon l'**EC-EN**.

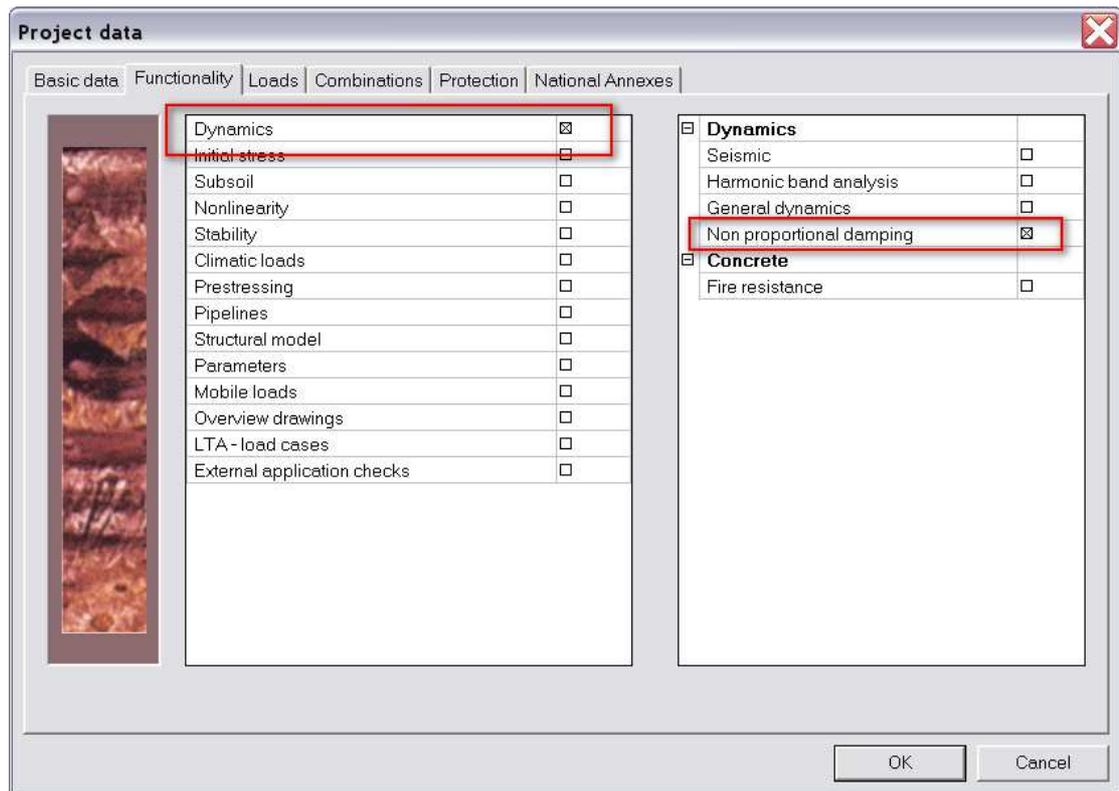


La poutre est chargée par une masse répartie de **500 kg / m**. Le poteau de gauche a un taux d'amortissement de **12%**, le poteau de droite a un amortissement de **3%**.

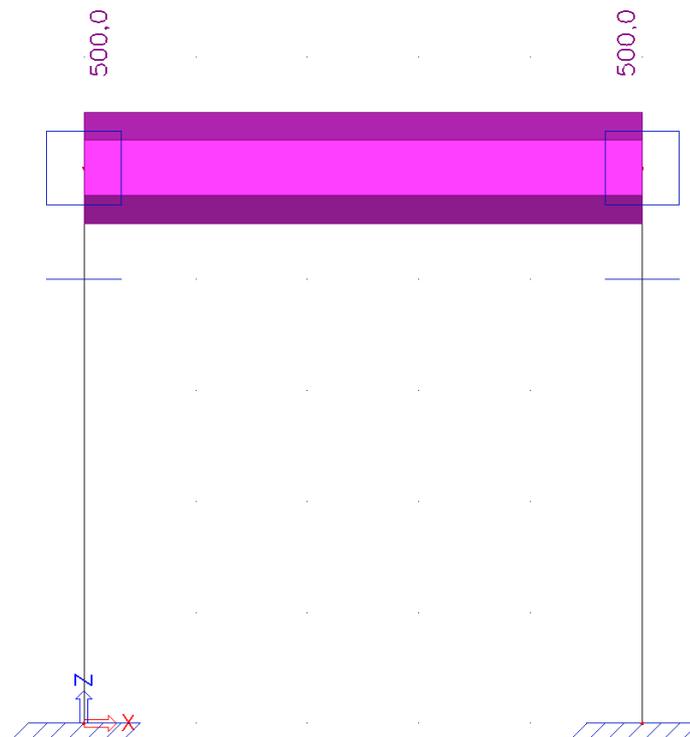
Un cas de charge statique est créé : le **pooids propre** de la poutre. Toutefois, afin de ne pas prendre le poids propre en compte pour le calcul dynamique, la masse volumique du matériau **C30/37** peut être réduite à **1e-10 kg / m<sup>3</sup>** dans la bibliothèque des **Matériaux**. Cette faible valeur est choisie pour éviter toute influence causée par la poutre rigide.

Les étapes de calcul des fréquences propres sont suivies et complétées par l'introduction de l'amortissement.

Etape 1 : La première étape dans le calcul Dynamique consiste à activer les fonctionnalités **Dynamique** et **Amortissement non-uniforme** dans l'onglet **Fonctionnalités** dans les **Paramètres de Projet**.



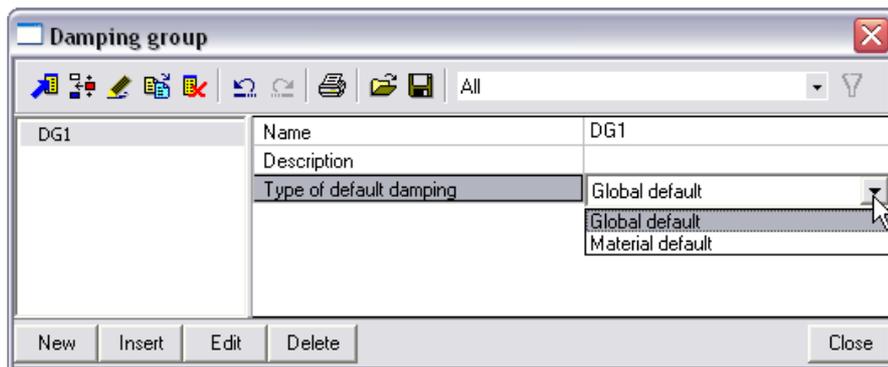
Étapes 2&3: Un **Groupe de Masses** est créé et une masse de **500 kg/m** peut être introduite sur la poutre rigide.



**Etape 4a:** Avant de créer une **Combinaison de Groupes de Masses**, les amortisseurs sont introduits.



Tout d'abord, un **Groupe d'amortissement** est créé.

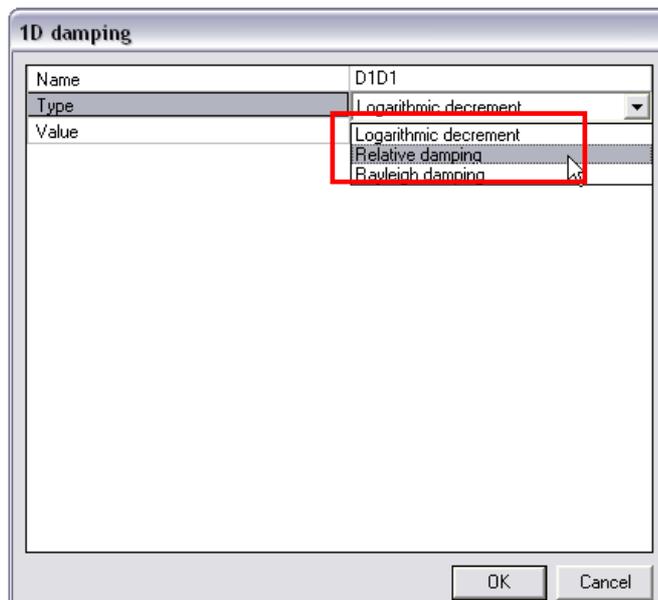


Comme spécifié dans la théorie, sur chaque élément un coefficient d'amortissement doit être défini. Quand aucun amortissement n'a été spécifié, une valeur par défaut sera utilisée. Dans les propriétés du **Groupe d'Amortissement**, ce défaut peut être défini comme étant soit un :

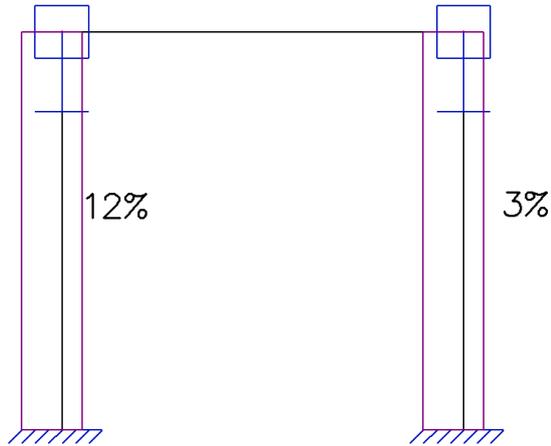
- Défaut Global: Le décrément logarithmique spécifié dans la **Configuration des Amortisseurs** sera utilisé
- Défaut selon le Matériau : Le décrément logarithmique du matériau sera utilisé

Dans cet exemple, le défaut global est choisi.

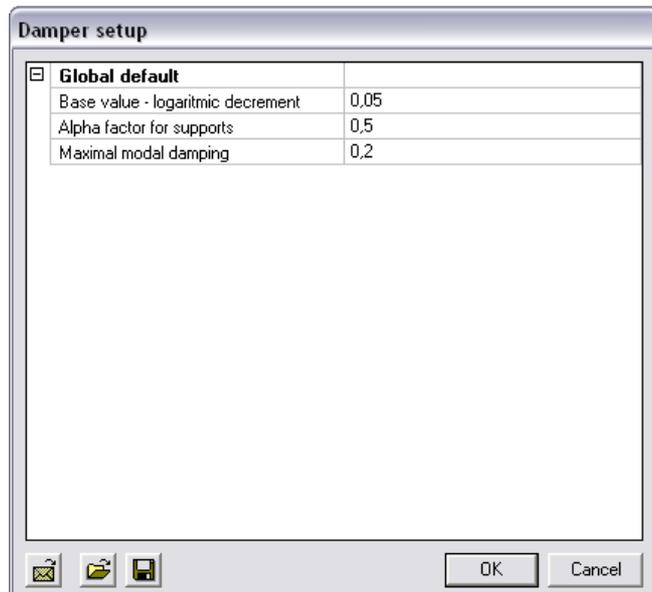
Après la création d'un **Groupe d'Amortissement**, les **Amortisseurs** peuvent être introduits. Dans cet exemple, l'**amortissement 1D** doit être saisi pour les poteaux. Comme expliqué dans la théorie, l'amortissement peut être saisi par les moyens suivants :



Sur le poteau de gauche, un **Amortissement relatif** de **0,12** est introduit. Sur le poteau de droite, un **Amortissement relatif** de **0,03** est introduit.



L'étape finale consiste à vérifier les paramètres généraux à travers la **Configuration des Amortisseurs** :



La valeur de base spécifie la valeur par défaut quand un Groupe d'Amortissement du type Défaut Global est choisi et aucun amortissement n'est introduit sur un élément.

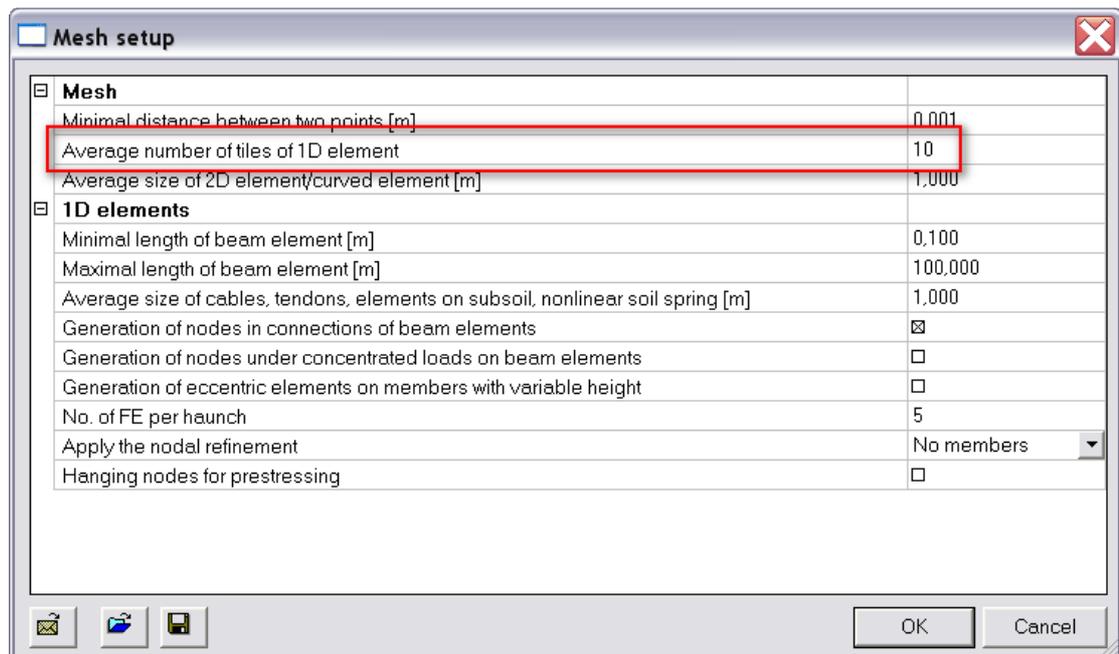
Le facteur alpha est utilisé dans le calcul de l'amortissement pour les appuis tel que spécifié dans la théorie.

Lorsque l'amortissement modal est calculé, la valeur est vérifiée par rapport à la valeur d'amortissement modal maximale définie ici. Si la valeur calculée est supérieure à la valeur maximale, la valeur maximale est utilisée. Dans cet exemple, la valeur maximale est prise égale à **0,2**, conformément à la remarque pour la formule (5.17)

**Etape 4b :** Une **Combinaison de Groupes de Masses** peut maintenant être créée et le **Groupe d'Amortissement** peut être spécifié.



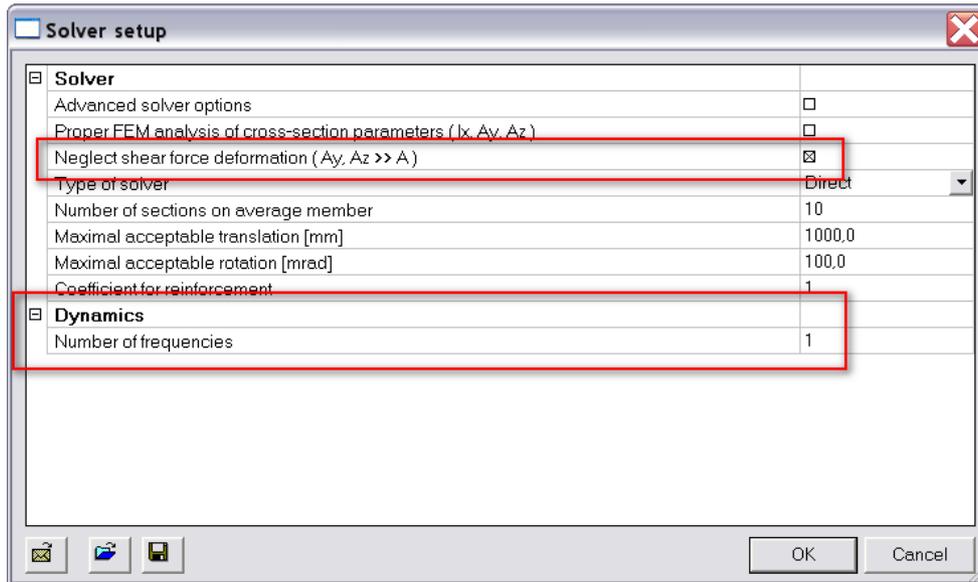
**Etape 5 :** Afin d'obtenir des résultats précis pour le calcul dynamique, le maillage doit être raffiné. Cela peut être fait dans **Calcul, Maillage > Configuration du Maillage**



Le **Nombre moyen des divisions des éléments 1D** est pris égal à 10.

**Etape 6 :** La dernière étape avant de lancer le calcul consiste à définir le nombre de modes propres à calculer. Pour cet exemple, un seul mode propre est requis. Dans **Calcul, Maillage > Solveur**, le nombre de fréquences est **1**.

Afin de pouvoir comparer les résultats avec un calcul manuel, les déformations d'effort tranchant sont négligées.



**Etape 7 :** Toutes les étapes ont été exécutées, il est maintenant possible de lancer un calcul à travers **Calcul, Maillage > Calcul**.

Les résultats suivants sont obtenus avec **Protocole de Calcul** pour les **Fréquences Propres** :

Sum of masses			
	X	Y	Z
Combination of mass groups 1	2500.00	0.00	2250.00

Modal participation factors							
Number	Omega	Period	Freq. [Hz]	Damp ratio	Wxi / Wxtot	Wyi / Wytot	Wzi / Wztot
1	89.0866	0.0705	14.1786	0.1026	1.0000	0.0000	0.0000
					1.0000	0.0000	0.0000

L'amortissement modal calculé est égal à **0,1026** ou **10,26%**.

### Calcul Manuel

In order to check the results of SCIA Engineer, a manual calculation is performed.

First, the calculated eigen frequency is checked using formula (2.3)

In this Example, the two columns can be treated as fixed-fixed beams. Using default engineering tables [12], each column contributes the following stiffness to the frame:

$$k = \frac{12EI}{L^3} \tag{5.19}$$

With: Column 1:  
 $E = 32000 \text{ N/mm}^2$   
 $I = 5208300000 \text{ mm}^4$   
 $L = 5000 \text{ mm}$

Column 2:  
 $E = 32000 \text{ N/mm}^2$   
 $I = 1250500000 \text{ mm}^4$   
 $L = 5000 \text{ mm}$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{12 \cdot 32000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 5208300000 \text{mm}^4}{(5000 \text{mm})^3} = 15999,8976 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{12 \cdot 32000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1250500000 \text{mm}^4}{(5000 \text{mm})^3} = 3841,536 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Both columns act in parallel since each column will displace the same amount due to the fact the beam is rigid. The beam itself does not bend so it does not contribute to the stiffness.

$$\Rightarrow k_{tot} = k_1 + k_2 = 15999,8976 \frac{\text{N}}{\text{mm}} + 3841,536 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 19841,4336 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

The vibrating mass is calculated as:

$$500 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 5 \text{m} = 2500 \text{kg}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{19841433,6 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{2500 \text{kg}}} = 89,087 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \mathbf{14,1787 \text{ Hz}}$$

These results correspond exactly to the results obtained by SCIA Engineer.

Next, the stiffness-weighted damping ratio is calculated. The first column has a damping ratio of **12%**, the second column a damping ratio of **3%**.

Using the elastic energy principle of formula (5.16) the modal damping ratio can be calculated as follows:

$$\xi = \frac{\xi_1 \cdot k_1 + \xi_2 \cdot k_2}{k_{tot}} = \frac{0,12 \cdot 15999,8976 \frac{\text{N}}{\text{mm}} + 0,03 \cdot 3841,536 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}{19841,4336 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}$$

$$= 0,1026 = \mathbf{10,26\%}$$

This result corresponds exactly to the result obtained by SCIA Engineer.

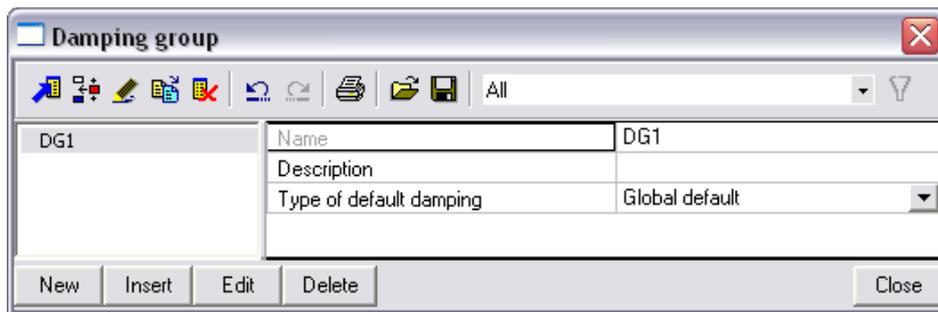
The modal damping ratio can now be used to calculate the Damping Coefficient in a seismic calculation. This will be illustrated in the following Examples.

### Exemple 11: Damping\_2.esa

Dans cet exemple, l'amortissement non uniforme est pris en compte dans le calcul sismique en utilisant la méthode de combinaison modale SRSS. À cette fin, l'exemple **Spectral Analysis\_2.esa** du chapitre précédent est complété avec des amortisseurs. Des amortissements relatifs de **12%**, **3%** et **8%** sont introduits sur les trois poteaux à partir de la base de la structure.

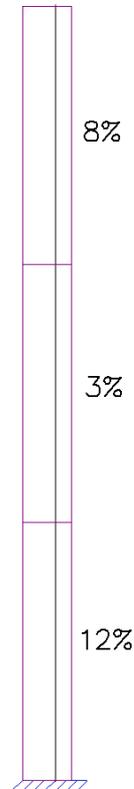
*Etape 1 :* La première étape consiste à activer la fonctionnalité **Amortissement non-uniforme** dans l'onglet **Fonctionnalités** des **Paramètres de Projet**.

*Etape 2 :* Dans la deuxième étape, nous allons créer un **Groupe d'Amortissement**



Etant donné qu'un amortisseur va être introduit sur tous les éléments, le choix d'un type d'amortissement par défaut n'est pas pertinent.

*Etape 3 :* Après la création d'un **Groupe d'amortissement**, les **Amortisseurs** peuvent être introduits. Des amortissements relatifs de **12%**, **3%** et **8%** sont saisis sur les trois poteaux en commençant par la base de la structure :



*Etape 4 :* Comme étape finale, le **Groupe d'Amortissement** est affecté à la **Combinaison de Masses** :



L'amortissement non uniforme a maintenant été saisi et le **Calcul Linéaire** peut être ré-exécuté pour voir les Résultats Sismiques.

Les résultats suivants sont obtenus par le **Protocole de Calcul** du **Calcul Linéaire** :

Number	Freq. [Hz]	Damp ratio	Damp coef.	Sax [m/s <sup>2</sup> ]	Say [m/s <sup>2</sup> ]	Saz [m/s <sup>2</sup> ]	G(j)	Fx [kN]	Fy [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]
1	0.5253	0.0996	0.8176	0.1651	0.0000	0.0000	0.5003	0.1800	0.0000	0.0000	-1.7994
2	3.4249	0.0711	0.9085	0.3979	0.0000	0.0000	0.0155	0.1288	0.0000	0.0000	-0.3716
Level=	0.00							0.22	0.00	0.00	1.84

Pour les deux modes propres, le **Taux d'Amortissement** modal est calculé en utilisant l'équation (5.17).

Comme précisé dans le chapitre précédent, ce Taux d'Amortissement sera utilisé pour calculer le **Coefficient d'Amortissement** qui influence les accélérations spectrales. En utilisant l'équation (4.13) :

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{10}{(5+9,96)}} = 0,8176$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{10}{(5+7,11)}} = 0,9087$$

Comme prévu, puisque les valeurs d'amortissement modal sont plus grandes que le défaut de 5% utilisé dans le spectre d'accélération, ils auront un effet positif en réduisant la réponse de la structure.

Pour le premier mode propre, seulement **81,7 %** de l'accélération spectrale sera pris en compte et pour le deuxième mode propre **90,8%**.

Les accélérations spectrales de l'exemple original sans amortissement peuvent donc être multipliées par  $\eta$  :

$$\Rightarrow S_{ax,(1)} = 0,2019 \frac{m}{s^2} \cdot 0,8176 = 0,1651 \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow S_{ax,(2)} = 0,4380 \frac{m}{s^2} \cdot 0,9087 = 0,3980 \frac{m}{s^2}$$

Ces accélérations spectrales ainsi corrigées vont influencer les coefficients de mode, le cisaillement à la base, le moment de renversement, les déplacements nodaux et les accélérations, ...

### Exemple 12: Damping\_3.esa

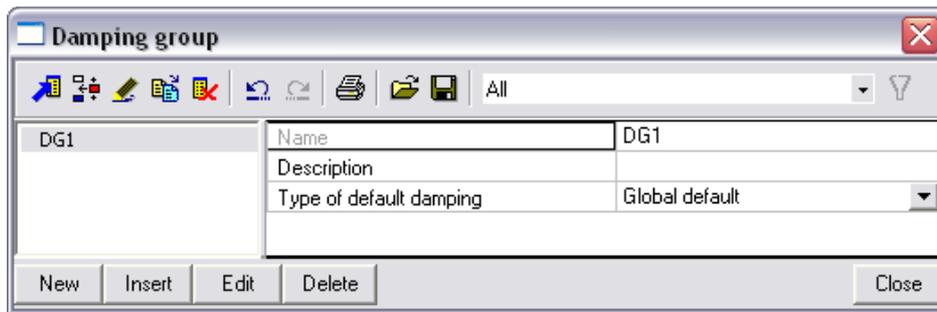
Dans cet exemple, l'amortissement non-uniforme est pris en compte dans le calcul sismique en utilisant la méthode de combinaison modale CQC. À cette fin, l'exemple **Spectral Analysis\_3.esa** du chapitre précédent est complété avec des amortisseurs. Des amortissements relatifs de **2%**, **5%** et **2%** sont introduits sur les trois poteaux à partir de la base de la structure.

Comme vu dans la théorie et dans l'exemple original, la méthode CQC nécessite la définition d'un spectre d'amortissement. Ce spectre d'amortissement a été utilisé pour le calcul des **Coefficients de Corrélation Modale** et des **Coefficients d'Amortissement** pour chaque mode.

Toutefois, lorsque l'Amortissement Non Uniforme est utilisé, les amortissements modaux composés sont utilisés *au lieu* des données d'amortissement du spectre. Ceci est illustré dans cet Exemple.

**Etape 1 :** La première étape consiste à activer la fonctionnalité **Amortissement non-uniforme** dans l'onglet **Fonctionnalités** des **Paramètres de Projet**.

**Etape 2 :** Dans la deuxième étape, nous allons créer un **Groupe d'Amortissement**



Etant donné qu'un amortisseur sera introduit sur tous les éléments, le choix du type d'amortissement par défaut n'est pas pertinent.

**Etape 3 :** Après la création d'un **Groupe d'Amortissement**, des **Amortisseurs** peuvent être introduits. Des amortissements relatifs de **2%**, **5%** et **2%** sont saisis sur les trois poteaux à partir de la base de la structure :



**Etape 4 :** Comme étape finale, le **Groupe d'Amortissement** est affecté à la **Combinaison de Masses** :



L'amortissement non uniforme a maintenant été saisi et le **Calcul Linéaire** peut être ré-exécuté pour voir les résultats Sismiques.

Les résultats suivants sont obtenus dans le **Protocole de Calcul** du **Calcul Linéaire** :

Number	Freq. [Hz]	Damp ratio	Damp coef.	Sax [m/s <sup>2</sup> ]	Say [m/s <sup>2</sup> ]	Saz [m/s <sup>2</sup> ]	G(j)	Fx [kN]	Fy [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]
1	0.5253	0.0265	1.1432	0.2308	0.0000	0.0000	0.6995	0.2517	0.0000	0.0000	-2.5160
2	3.4249	0.0330	1.0980	0.4809	0.0000	0.0000	0.0187	0.1556	0.0000	0.0000	-0.4491
Level=	0.00							0.30	0.00	0.00	2.56

Dans l'Exemple original, un spectre d'amortissement avec un taux d'amortissement constant de **2%** a été utilisé. Grâce aux amortisseurs introduits, les amortissements modaux composés de **2,64%** et **3,30%** sont maintenant utilisés.

En utilisant l'équation (4.13) Les **Coefficients d'Amortissement** peuvent être calculés :

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{10}{(5 + 2,65)}} = 1,1432$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{10}{(5 + 3,30)}} = 1,0976$$

Comme ce fut le cas dans l'exemple original, les taux d'amortissement sont plus bas que la valeur de 5% utilisée par défaut dans le spectre d'accélération. Ils auront un effet négatif en augmentant la réponse de la structure.

Etant donné que les taux d'amortissement calculés dans l'exemple original sont plus grands que 2%, la réponse sera plus petite.

Le calcul des **Taux d'Amortissement Modal** sera utilisé pour le calcul des **Coefficients de Corrélation Modale** de la **méthode CQC**.

Ceci sera illustré dans un calcul manuel.

## Calcul Manuel

In this paragraph, the application of the **CQC-method** using the calculated Composite Modal Damping Ratios is illustrated for the global response of the Base Shear.

$$\text{Mode 1: } \omega_{(1)} = 3,3007 \text{ rad/s} \quad F_{(1)} = 0,2701 \text{ kN}$$

$$\text{Mode 2: } \omega_{(2)} = 21,5192 \text{ rad/s} \quad F_{(2)} = 0,1629 \text{ kN}$$

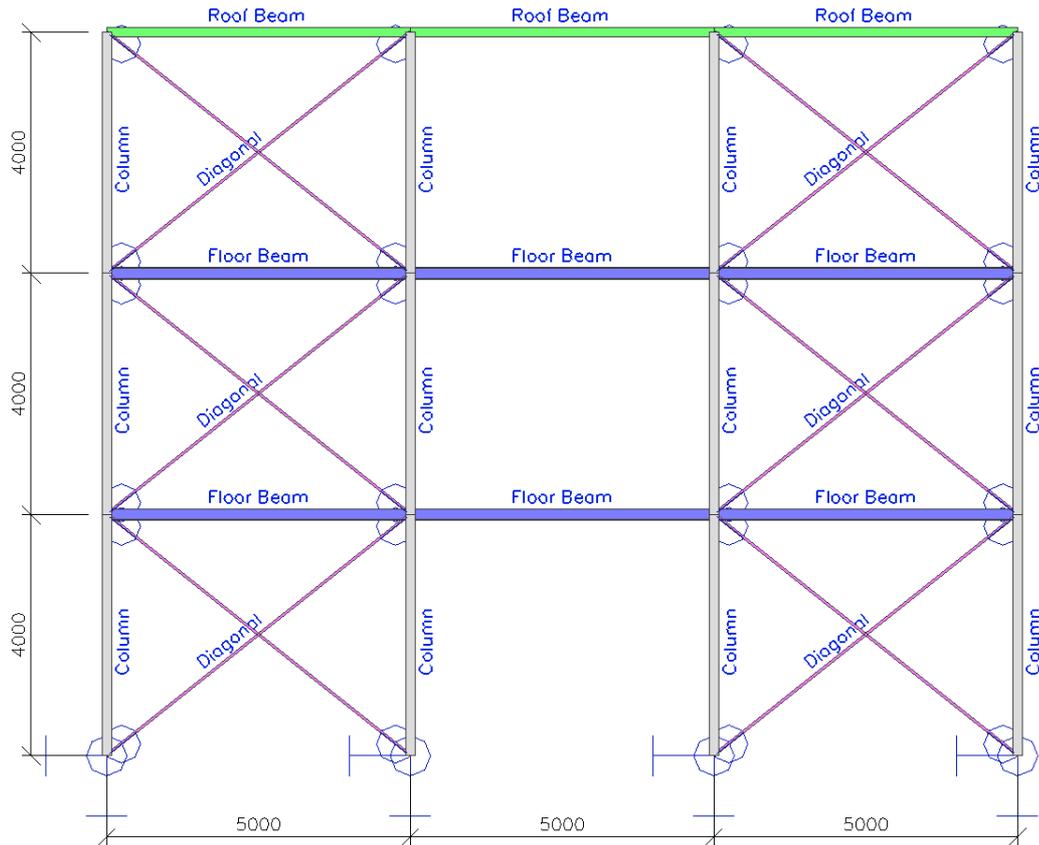
Using a spreadsheet, the Modal Cross Correlation Coefficients  $\rho_{i,j}$  are calculated with a damping ratio  $\xi_{i,j}$  of **2,64%** for the first eigenmode and **3,30%** for the second eigenmode.

Mode	1	2
1	1	0,00055202
2	0,00055202	1

$$\begin{aligned}
 R_{tot} &= \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_{(i)} \cdot \rho_{i,j} \cdot R_{(j)}} \\
 &= \sqrt{0,2701kN \cdot 1 \cdot 0,2701kN + 0,2701kN \cdot 0,00055202 \cdot 0,1629kN} \\
 &\quad + 0,1629kN \cdot 0,00055202 \cdot 0,2701kN + 0,1629kN \cdot 1 \cdot 0,1875kN \\
 &= 0,315kN
 \end{aligned}$$

The difference between these Correlation Coefficients and the original is very small which was to be expected since the calculated damping ratios are close to the original 2%.





Les diagonales sont **articulées** dans les deux directions. Les bases des poteaux sont aussi articulées avec des ancrages qui sont espacés de telle sorte que la rotation autour de l'**axe Z** est prise comme **fixe**.

Les membres en acier ont les sections suivantes :

- Poteaux : **IPE 300**
- Poutres de plancher : **HEA 200**
- Poutres de toiture : **IPE 160**
- Diagonales: **L(ARC) 40x40x4**

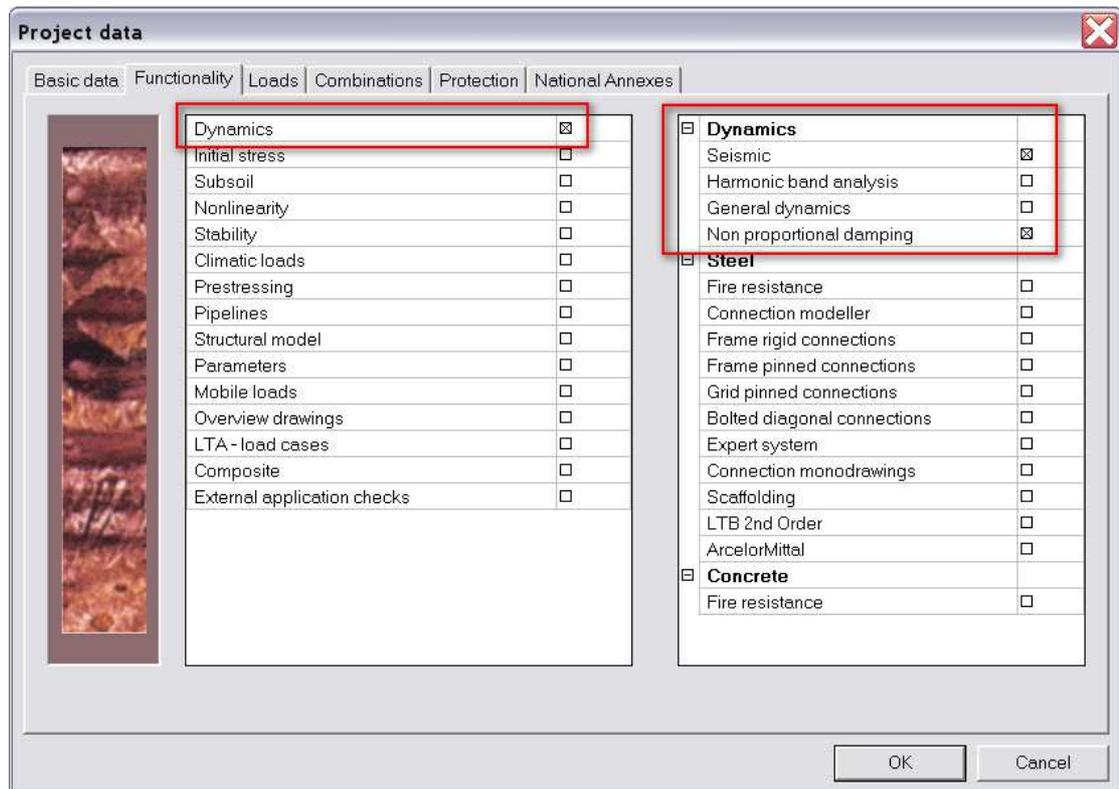
Les charges verticales qui agissent sur la structure sont :

- Cas de Charge 1 : Le **pooids propre** du dépôt
- Cas de Charge 2 : Charge d'exploitation de catégorie E (Stockage) d'une valeur de **5 kN/m<sup>2</sup>** sur toutes les poutres de plancher.

La structure sera soumise à un séisme dans les directions **X**, **Y** et **Z**, en utilisant un Spectre de Dimensionnement selon l'Eurocode 8 pour les sols de type **A** et un facteur de comportement de **1,5**. Cela veut dire que le spectre pour les efforts internes sera divisé par cette valeur. Le coefficient d'accélération est **0,5**.

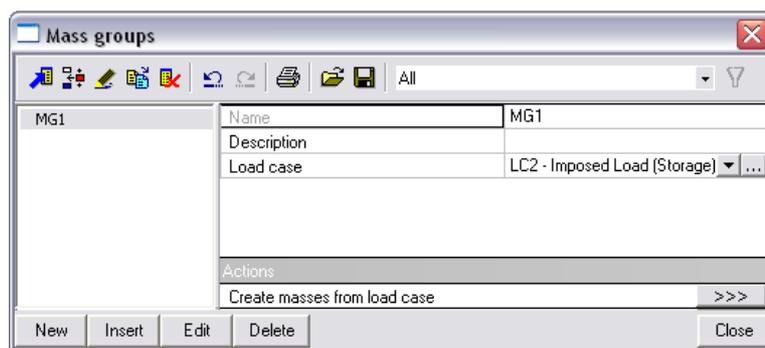
Pour le calcul dynamique, l'amortissement structural du dépôt est pris en compte. Un **décroissement logarithmique** de **0,025** est utilisé pour l'acier et **0,056** pour le béton [22].

Etape 1 : La première étape dans le calcul Dynamique consiste à activer les fonctionnalités **Dynamique** et **Amortissement non-uniforme** dans l'onglet **Fonctionnalités** dans les **Paramètres de Projet**.

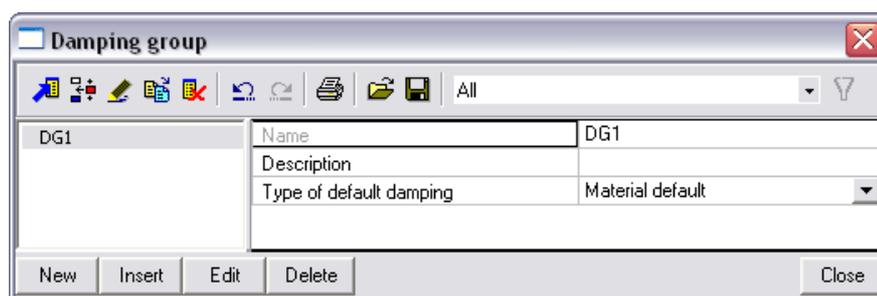


Etapes 2&3: La deuxième étape consiste à créer les **Groupes de Masses** et la troisième à créer les **Masses**. Puisque le poids propres est pris en compte automatiquement dans une **Combinaison de Groupes de Masses**, un seul **Groupe de Masses** est créé ici, un groupe pour prendre en compte la masse due à la charge d'exploitation.

En utilisant la fonction 'Créer des masses à partir du Cas de Charge', les masses sont générées automatiquement à partir des charges déjà introduites.

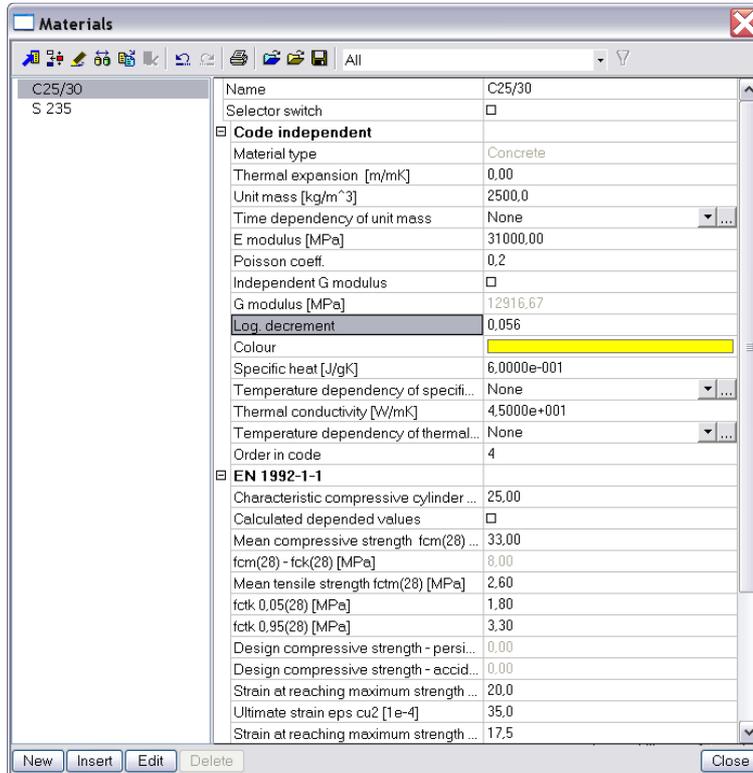


Etape 4a : Avant de créer une **Combinaisons de Groupes de Masses**, l'amortissement est spécifié. Pour commencer, le **Groupe d'Amortissement** est créé.



Puisque, dans cet Exemple, l'amortissement structural de l'acier et du béton est pris en compte, le Type d'amortissement par défaut est mis sur **Défaut du Matériau**. De cette façon, quand aucun amortissement n'est introduit pour un élément, la valeur d'amortissement par défaut du matériau sera utilisée.

Les valeurs d'amortissement peuvent être spécifiées dans la Bibliothèque des **Matériaux** :



Un décrement logarithmique de **0,056** et de **0,025** est introduit respectivement pour le béton et pour l'acier.

Etape 4b : Le **Groupe de Masses** et le **Groupe d'Amortissement** peuvent maintenant être combinés dans un **Groupe de Masses**.

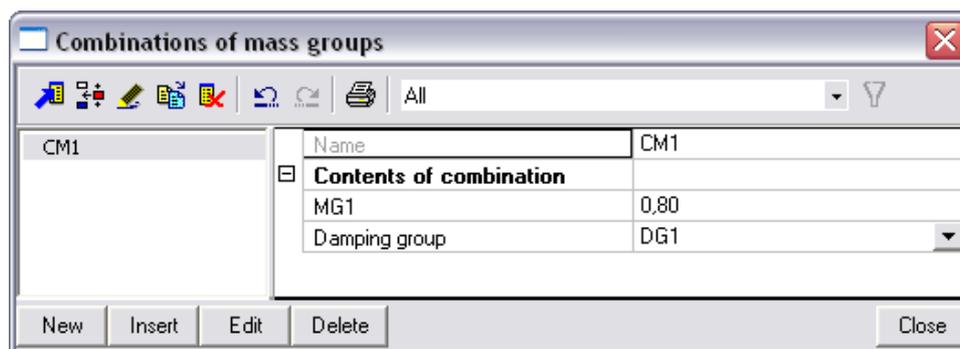
Comme spécifié dans la formule (2.9) toutes les charges de gravité qui paraissent dans la combinaison d'actions suivante doivent être prises en compte pour le calcul des valeurs propres :

$$\sum G_k + \sum \psi_{E,i} \cdot Q_{k,i}$$

Pour cet exemple, avec une charge d'exploitation de **Catégorie E**,  $\phi$  est pris égal à **1,0** et  $\psi_{2,i}$  comme **0,8**.

Cela donne une valeur de **0,8** pour  $\psi_{E,i}$

Puisque le Poids Propre est pris en compte automatiquement, la Combinaison de Groupes de Masses **CM1** peut être formulée comme **0,80 MG1**



Comme étape finale, le **Groupe d'amortissement** est affecté à la **Combinaison de groupe de masse**.

**Etape 5 :** Avant de créer les cas de charge Sismiques, le Spectre Sismique doit être défini dans **Bibliothèques > Spectres Sismiques**.

Au lieu d'introduire un spectre manuellement, le spectre selon l'EC8 est choisi. Dans cet exemple, le spectre pour le sol de Type **A** avec un coefficient de comportement  $q = 1,5$  est utilisé dans toutes les directions :

frequency [Hz]	Period [sec]	
1 0,00	1000,00	0,20
2 0,25	4,00	0,20
3 0,50	2,00	0,20
4 0,75	1,33	0,28
5 1,00	1,00	0,42
6 1,25	0,80	0,52
7 1,50	0,67	0,63
8 1,75	0,57	0,73
9 2,00	0,50	0,83
10 2,25	0,44	0,94
11 2,50	0,40	1,04
12 2,75	0,36	1,15
13 3,00	0,33	1,25

Code parameters	
coeff accel. ag	0,102
ag - design acceleration [m/sec^2]	1,000
q - behaviour factor	1,500
beta	0,200
S, Tb, Tc, Td manually?	No
Subsoil type	A
Spectrum type	type 2
Direction	Horizontal
S - soil factor	1,000
Tb	0,050
Tc	0,250
Td	1,200

**Etape 6 :** Les cas de charges **Sismiques** peuvent maintenant être définis à travers **Cas de Charges, Combinaisons > Cas de Charges**.

Pour le cas de Charge Sismique dans la **direction X**, les paramètres suivants sont utilisés :

**General seismic load**

Seismic spectrum X : EC8-h-f    direction X : 1

Seismic spectrum Y : EC8-v-d    direction Y : 0

Seismic spectrum Z : EC8-v-d    direction Z : 0

Type of evaluation

SRSS

Max

CQC    CQC1

Predominant mode

Signed results   

Mode shape    Default

Multiple eigen shapes

Unify shapes   

Precision    0,00 %

coeff accel.    0,5

Overturning    0

Mass in analysis

Participation mass only   

Missing mass in modes   

Residual mode   

OK    Cancel

Le **Coefficient d'Accélération** est pris égal à **0,5** et la méthode d'évaluation choisie est la **méthode CQC**.

De la même manière, les Cas de Charge Sismiques dans les **directions Y et Z** sont définis :

**General seismic load**

Seismic spectrum X : EC8-h-f    direction X : 0

Seismic spectrum Y : EC8-h-f    direction Y : 1

Seismic spectrum Z : EC8-h-f    direction Z : 0

Type of evaluation

SRSS

Max

CQC    CQC1

Predominant mode

Signed results   

Mode shape    Default

Multiple eigen shapes

Unify shapes   

Precision    0,00 %

coeff accel.    0,5

Overturning    0

Mass in analysis

Participation mass only   

Missing mass in modes   

Residual mode   

OK    Cancel

Cela doit être répété pour les cas de charge qui définissent les déformations (le coefficient de comportement  $q$  est différent).

**Remarque :**

- Pour le Cas de Charge Sismique Z, un nouveau spectre doit être défini avec le type **vertical**.
- **6 combinaisons EN-Sismique** doivent être définies, 3 pour les efforts internes et 3 pour la déformation. Dans le cas des résultats de déformation, les valeurs doivent être **multipliée par le coefficient**.

Selon l' Eurocode 8 [7], les effets dus aux composants de l'action sismique peuvent être calculés en utilisant les combinaisons suivantes :

$$E_{Edx} + "0,3E_{Edy} + "0,3E_{Edz}$$

$$0,3E_{Edx} + " E_{Edy} + "0,3E_{Edz}$$

$$0,3E_{Edx} + "0,3E_{Edy} + " E_{Edz}$$

Où :

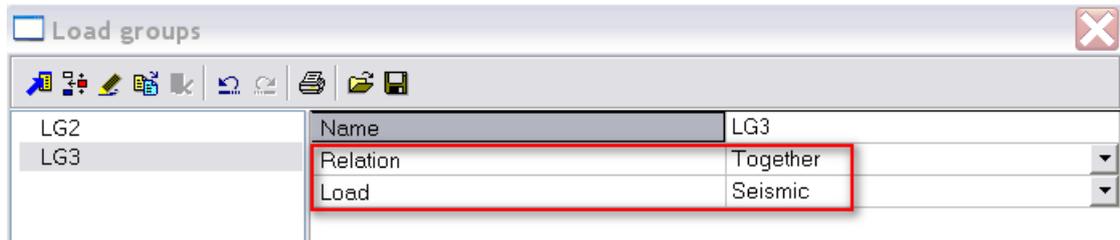
"+" = Signifie "à combiner avec".

$E_{Edx}$  = Représente l'effet de l'action due à l'application du séisme selon l'axe horizontal x choisi pour la structure.

$E_{Edy}$  = Représente l'effet de l'action due à l'application du même séisme selon l'axe horizontal y choisi pour la structure.

$E_{Edz}$  = Représente l'effet de l'action due à l'application du même séisme selon l'axe vertical z choisi pour la structure.

Tout d'abord, cela implique que tous les cas de charge doivent toujours être considérés ensemble dans une combinaison. Dans SCIA Engineer, cela peut être fait en mettant les deux cas de charge sismique dans un **Groupe de Charges** avec la relation **Ensemble**.

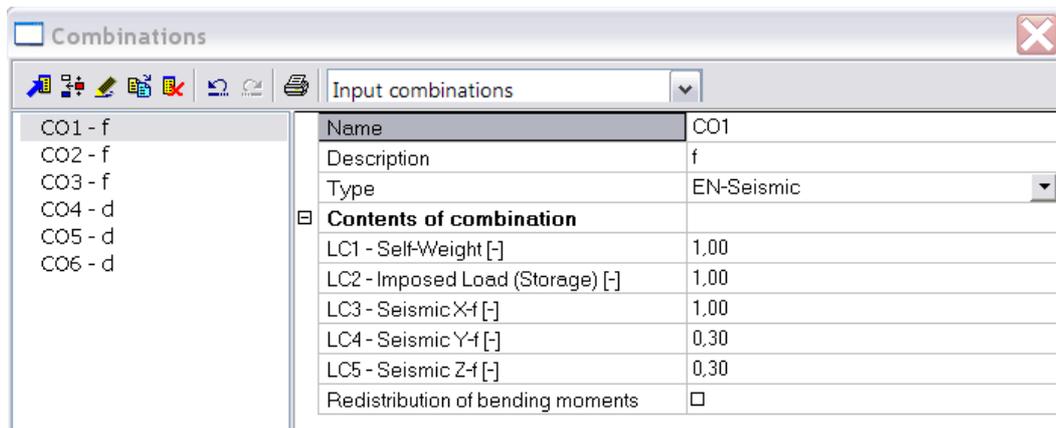


Ensuite, la combinaison pour le calcul Sismique peut être introduite. Selon l'Eurocode 8 [7] cette combinaison est la suivante :

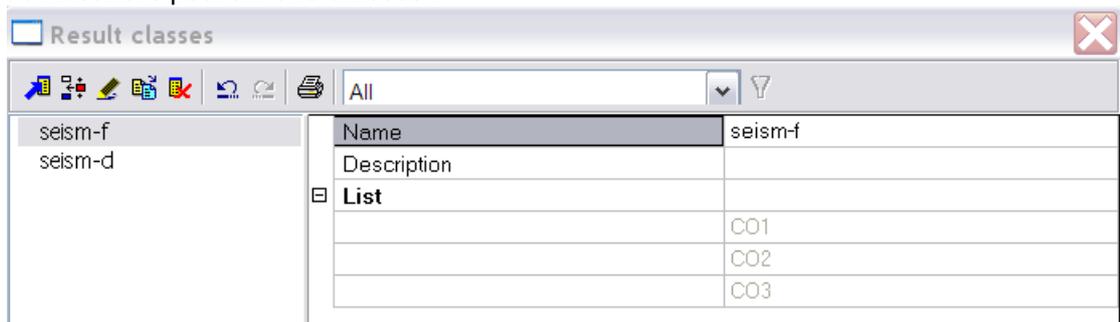
$$\sum G_k + P + A_{Ed} + \sum \psi_{2,i} \cdot Q_{k,i} \quad (5.22)$$

Où  $A_{ed}$  représente l'action accidentelle qui est dans ce cas, l'action sismique combinée. Dans SCIA Engineer, le type EN-sismique peut être utilisé à cette fin.

Pour remplir les conditions de l'Eurocode, 6 combinaisons de ce type sont créées :

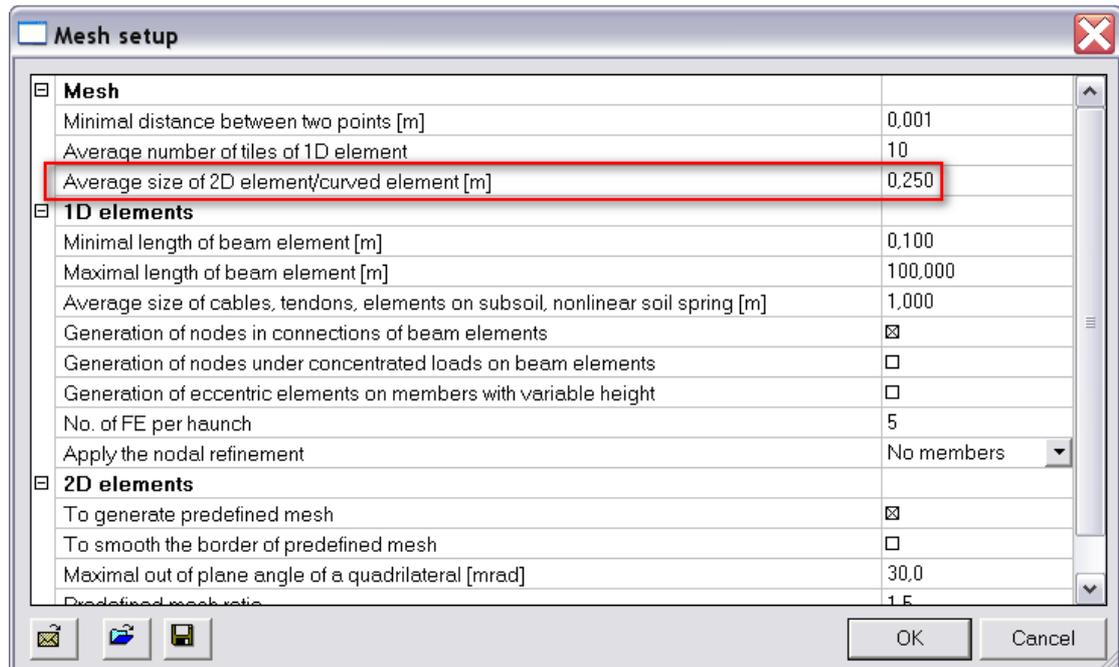


Afin de pouvoir voir les extrêmes globaux pour les deux combinaisons, deux **Classes de Résultats** peuvent être utilisées :

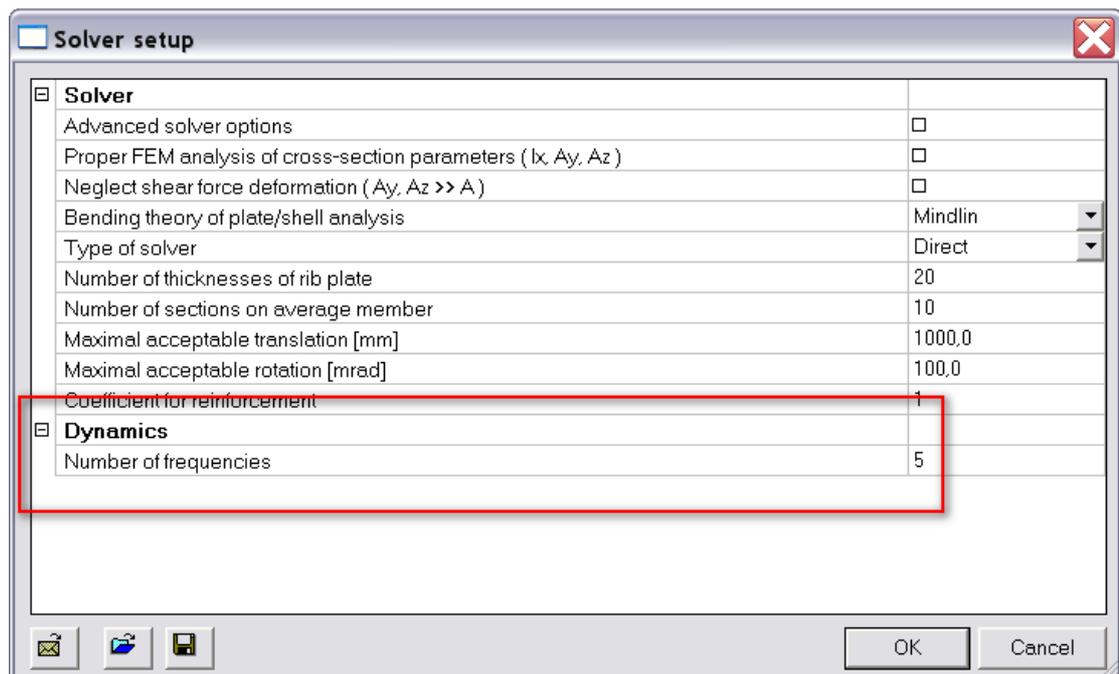


**Etape 7:** Pour obtenir des résultats précis, le Maillage est raffiné dans **Calcul, Maillage > Configuration du Maillage**.

Le **Nombre moyen de division des éléments 1D** est fixé à 10, la **Taille moyenne des éléments 2D** est prise égale à **0,25 m**



**Etape 8 :** La dernière étape avant de lancer un calcul est de saisir le nombre de modes propres à calculer. 5 modes propres sont choisis.  
 Dans **Calcul, Maillage > Configuration du Solveur**, le nombre de fréquences est pris comme 5.



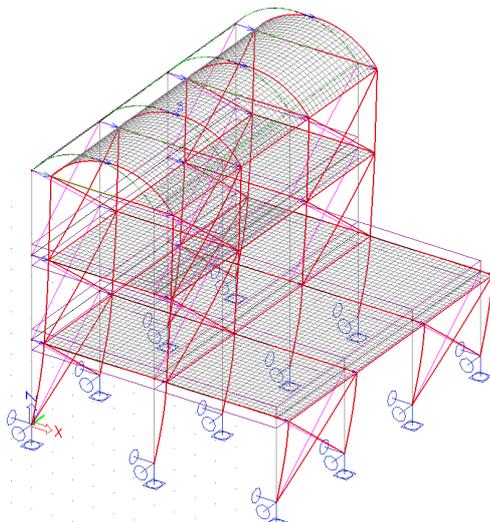
**Etape 9 :** Toutes les étapes ont été exécutées, un **Calcul Linéaire** peut donc être lancé en allant dans **Calcul, Maillage > Calcul**.

Le **Protocole de Calcul** pour les **Fréquences Propres** donne les résultats suivants :

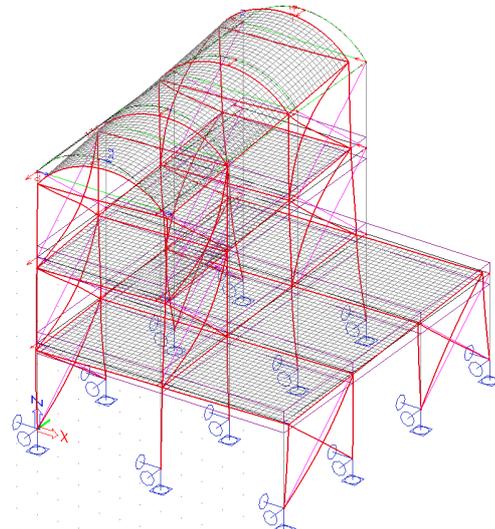
Number	Omega	Period	Freq. [Hz]	Damp ratio	Wxi / Wxtot	Wyi / Wytot	Wzi / Wztot
1	4.6018	1.3654	0.7324	0.0034	0.9688	0.0000	0.0000
2	11.4191	0.5502	1.8174	0.0057	0.0000	0.6685	0.0000
3	13.6354	0.4608	2.1701	0.0052	0.0270	0.0000	0.0002
4	13.8212	0.4546	2.1997	0.0384	0.0000	0.2707	0.0000
5	14.9363	0.4207	2.3772	0.0362	0.0000	0.0000	0.0000
					0.9957	0.9392	0.0002

Nous pouvons voir que pour les deux directions horizontales, plus de **90%** de la masse totale est pris en compte dans ces cinq modes. Ce nombre de valeurs propres est donc suffisant pour ce calcul.

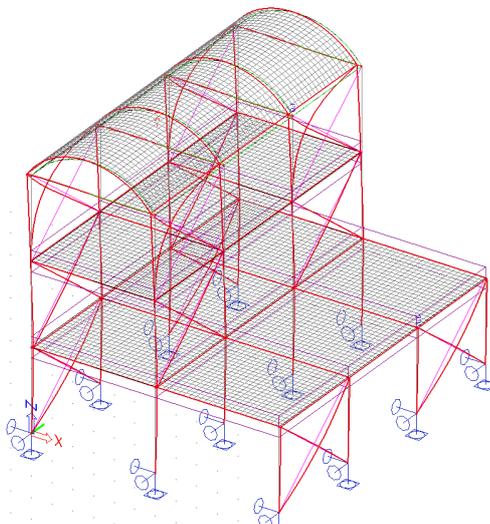
Dans **Déformation des nœuds des éléments 2D**, la Déformée du Maillage peut être utilisée pour visualiser les modes calculés :



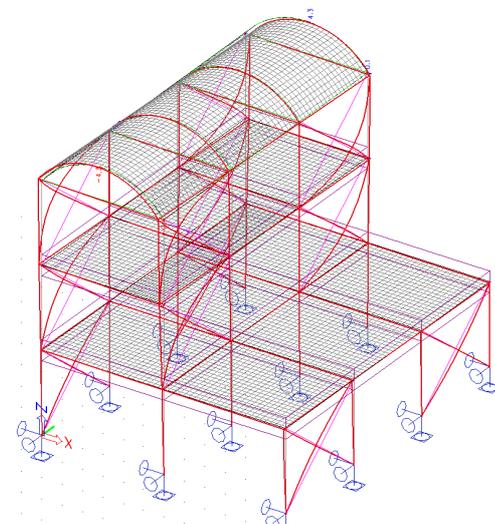
Mode propre 1:  $f = 0,73$  Hz



Mode propre 2:  $f = 1,82$  Hz



Mode propre 3:  $f = 2,17$  Hz



Mode propre 4:  $f = 2,20$  Hz

Le **Protocole de Calcul** pour le calcul **Linéaire** montre les résultats du calcul sismique :

Dynamic loadcase: 3											
Number	Freq. [Hz]	Damp ratio	Damp coef.	Sax [m/s <sup>2</sup> ]	Say [m/s <sup>2</sup> ]	Saz [m/s <sup>2</sup> ]	G(j)	Fx [kN]	Fy [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]
1	0.7324	0.0034	1.3683	0.1890	0.0000	0.0000	4.5975	50.1569	-0.0000	0.0000	-315.5871
2	1.8174	0.0057	1.3397	0.5078	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
3	2.1701	0.0052	1.3457	0.6088	0.0000	0.0000	0.2815	4.4982	-0.0010	0.0048	43.6442
4	2.1997	0.0384	1.0634	0.4876	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0022	0.0127	0.0000
5	2.3772	0.0362	1.0774	0.5338	0.0000	0.0000	-0.0015	0.0002	-0.0010	0.0052	0.0007
Level=	0.00							50.36	0.00	0.02	318.59

Dynamic loadcase: 4											
Number	Freq. [Hz]	Damp ratio	Damp coef.	Sax [m/s <sup>2</sup> ]	Say [m/s <sup>2</sup> ]	Saz [m/s <sup>2</sup> ]	G(j)	Fx [kN]	Fy [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]
1	0.7324	0.0034	1.3683	0.0000	0.1890	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
2	1.8174	0.0057	1.3397	0.0000	0.5078	0.0000	1.6664	0.0000	92.9906	-621.5304	0.0000
3	2.1701	0.0052	1.3457	0.0000	0.6088	0.0000	-0.0001	-0.0010	0.0000	-0.0000	-0.0095
4	2.1997	0.0384	1.0634	0.0000	0.4876	0.0000	-0.6952	-0.0022	36.1649	-206.2595	-0.0267
5	2.3772	0.0362	1.0774	0.0000	0.5338	0.0000	0.0075	-0.0010	0.0053	-0.0269	-0.0033
Level=	0.00							0.00	100.99	661.92	0.03

Pour chaque Mode propre, le taux d'amortissement composite a été calculé en utilisant l'amortissement structurel de l'acier et du béton.

La Classe de résultat peut maintenant être utilisée pour vérifier les éléments structuraux.

## 6. Reduced Analysis Model

### 6.1 Théorie

La tendance actuelle des analyses structurelles par éléments finis(FE) est à la modélisation 3D de la structure étudiée. SCIA Engineer obéit à la règle selon laquelle les structures – bâtiments compris – sont généralement modélisées en 3D à l'aide de poutres et d'éléments de coque.

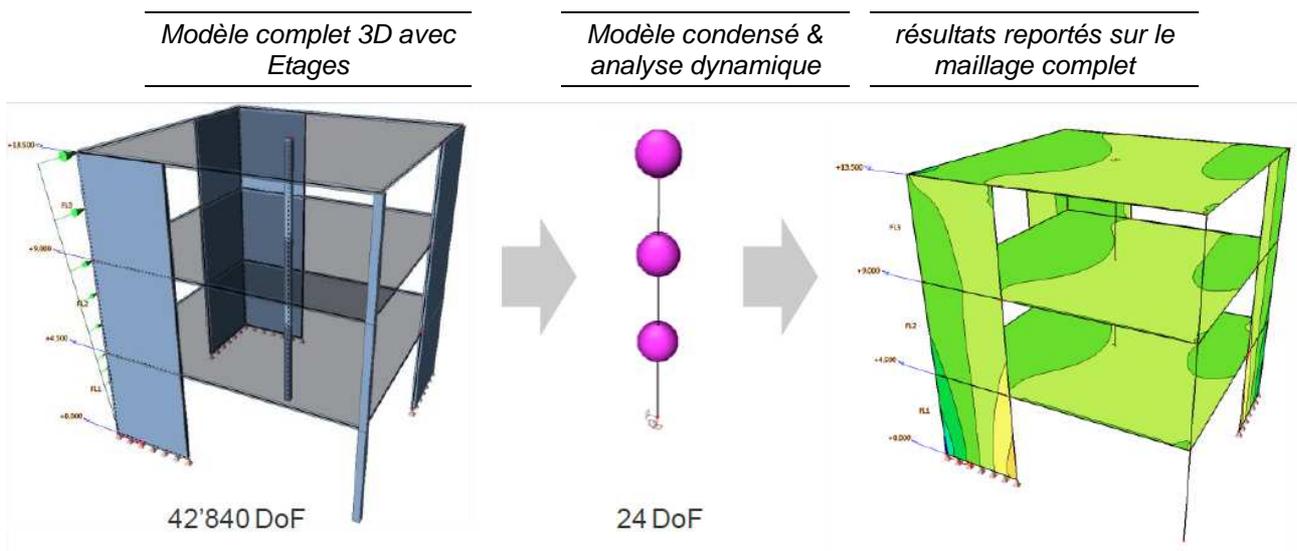
Dès qu'une modélisation 3D détaillée est prête pour une analyse statique de structure, il est naturel de l'utiliser également pour une analyse dynamique et, plus spécifiquement, dans le cadre d'une conception parasismique. L'un des problèmes types des modélisations 3D intégrales est que la conception parasismique concerne plutôt le comportement général de la Structure alors que le maillage complet de la structure donne de nombreuses informations à propos des comportements locaux.

Plus spécifiquement, pour l'analyse modale, le maillage complet laisse apparaître des modes de vibration locaux qui sont sans objet pour la réponse sismique globale de la structure. Il paraît donc logique d'utiliser un maillage différent - condensé- pour l'analyse dynamique.

Des techniques bien connues de condensation de la matrice de rigidité(condensation de Guyan, également appelée condensation statique) permettent d'obtenir très efficacement un système condensé, mais ces méthodes ne sont pas parfaitement adaptées aux analyses dynamiques. Une méthode améliorée de système condensé (IRS ou Improved Reduced System) a été développée ; elle ne tient pas seulement compte de la matrice de rigidité du système, mais aussi de la matrice de masse au cours du processus de condensation. Cette méthode a donné d'excellents résultats pour l'analyse dynamique, que ce soit avec les méthodes d'analyse modale ou d'intégration temporelle directe.

L'algorithme implémenté dans SCIA Engineer utilise la méthode IRS et comprend 3 étapes :

1. La méthode IRS est utilisée pour condenser le maillage du modèle d'analyse.
2. L'analyse modale est accomplie à l'aide du maillage condensé, qui a typiquement 1 000 fois moins de degrés de liberté que le maillage complet original. Cela rend le calcul des valeurs propres massivement plus rapide dans les grandes structures et évite les modes locaux indésirables. Ce dernier point est particulièrement intéressant pour les analyses sismiques.
3. Les résultats du système condensé sont extrapolés au maillage complet d'origine, ce qui permet la production de résultats détaillés pour l'intégralité de la structure.



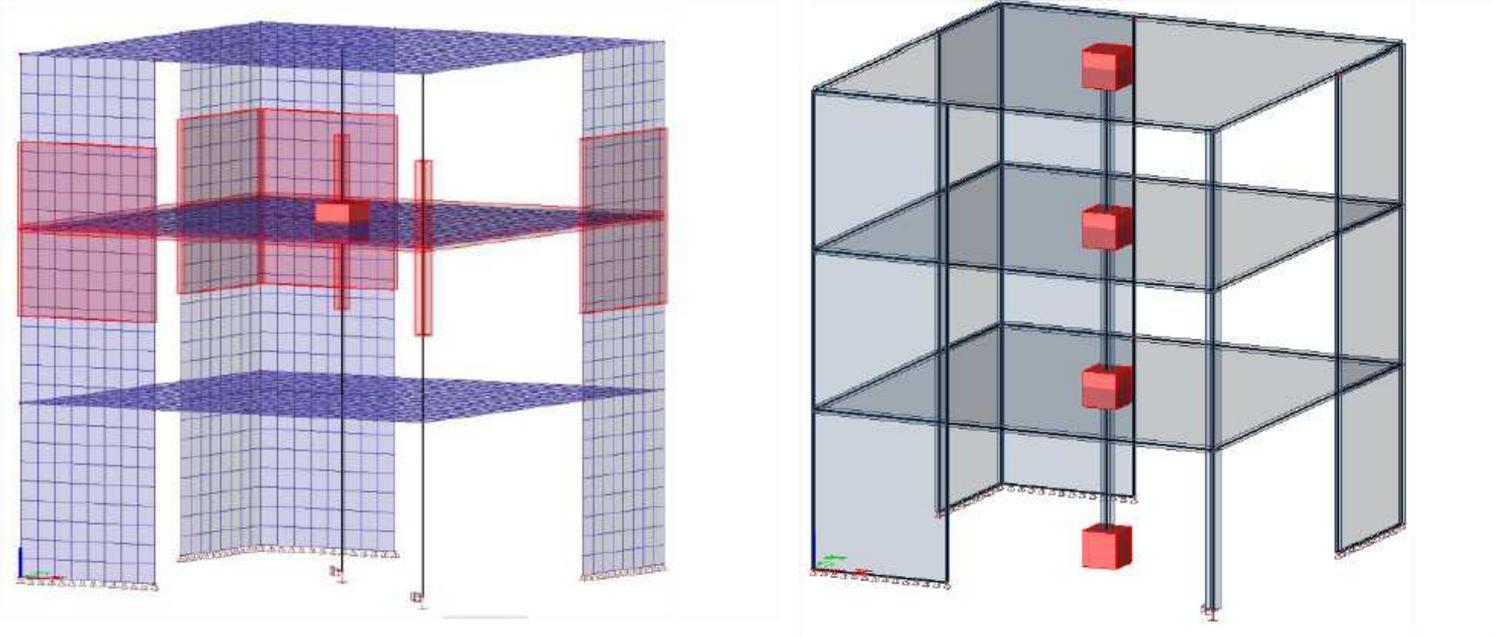
La méthode IRS permet :

- 1. L'élimination des modes de vibrations flexionnels locaux, non pertinents dans les dalles** : Les modes locaux de tous les éléments structurels sont implicitement supprimés, du fait de l'élimination des degrés de liberté indésirables. Bien entendu, l'ajout de points de condensation supplémentaires permettrait une analyse des modes locaux plus détaillée, mais il est particulièrement intéressant pour les analyses sismiques de ne conserver dans le modèle condensé que les nœuds strictement nécessaires à la reproduction du comportement sismique typique d'une construction. Au final, il incombe à l'utilisateur de choisir les points de condensation de telle sorte que tous les modes propres désirés soient obtenus.
- 2. La réduction du temps de calcul** : Le temps de calcul est réduit du fait de la réduction drastique du nombre de degrés de liberté ; en réalité, la réduction est encore plus importante qu'avec la méthode des diaphragmes car les éléments porteurs sont également condensés.
- 3. Gestion simplifiée de l'excentricité de masse des dalles** : L'analyse IRS utilise une matrice de masse complète, ce qui permet une prise en compte exacte des excentricités de masse dans chaque nœud du système condensé.

**Remarque** : L'élimination des effets de cadre – n'est pas résolue par l'analyse IRS proprement dite, car cette dernière ne modifie pas le comportement mécanique de la structure. Toutefois, comme les modes de flexion locaux indésirables sont implicitement supprimés du système condensé, il est facile de simuler des diagrammes souples par une réduction significative de la rigidité flexionnelle des dalles. Cela permet non seulement d'obtenir un comportement de diaphragme classique par le biais d'une rigidité flexionnelle très faible, mais aussi de générer un comportement intermédiaire partout où la rigidité flexionnelle est moins radicalement réduite ; ainsi, les effets de cadre sont réduits sans être totalement supprimés.

Le modèle condensé est obtenu à partir des nœuds de Réduction. Les nœuds sont placés au niveau de chaque étage, au niveau spécifié, au milieu de la structure (tous les nœuds de réduction se trouvent sur le même axe vertical).

Au cours de l'analyse, le modèle condensé est généré automatiquement à partir du maillage complet de la structure. Chaque nœud du maillage complet est mappé sur le point de condensation le plus proche. Dans une configuration typique de bâtiment, cela signifie que chaque point de condensation reçoit la rigidité, les forces et les masses de la dalle correspondante, de la moitié supérieure des éléments porteurs en dessous de la dalle et de la moitié inférieure des éléments porteurs au-dessus de la dalle.



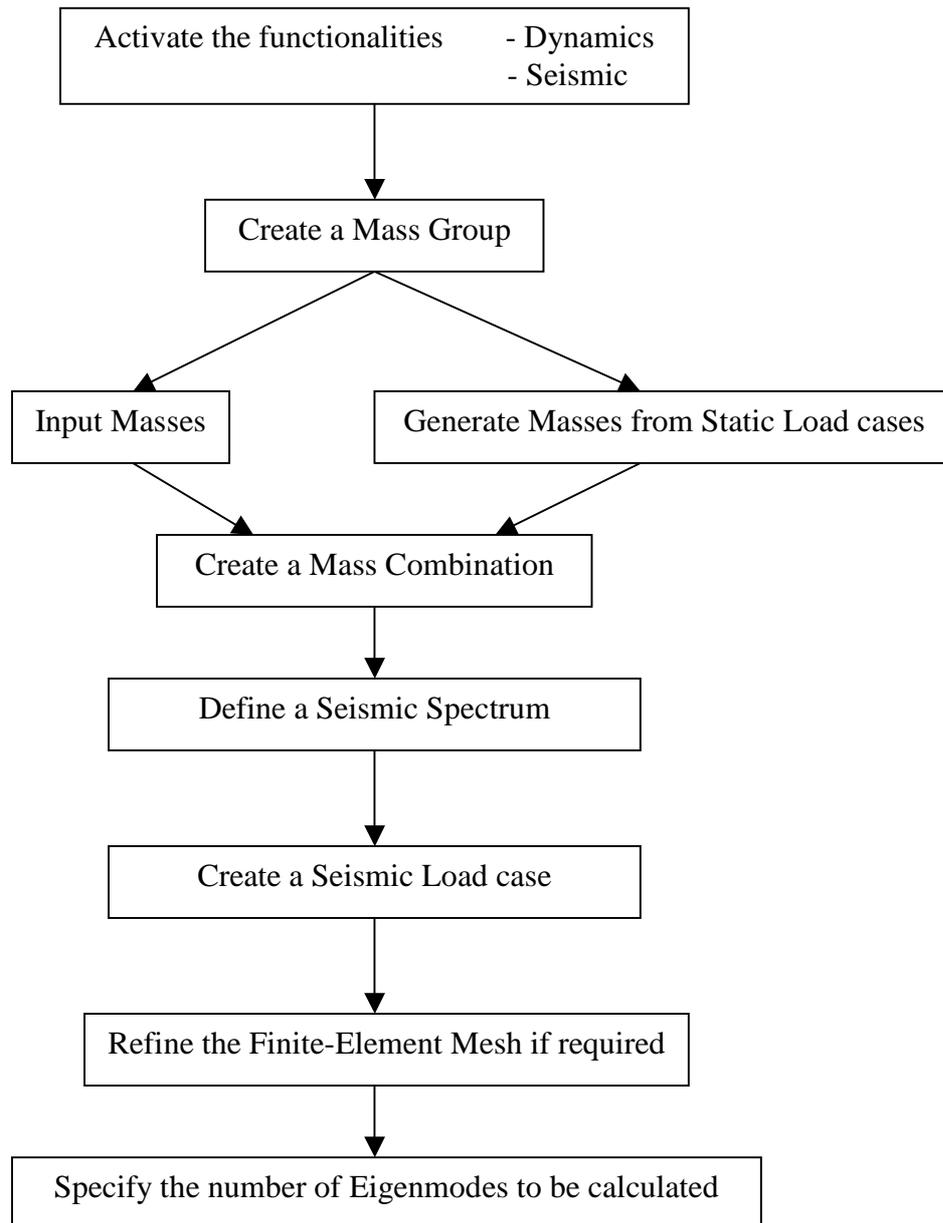
Contrairement à l'analyse modale classique, qui fait généralement appel à une matrice de masse diagonale (seuls les termes situés sur la diagonale sont différents de zéro), le système condensé utilise une matrice de masse complète avec des valeurs non nulles hors de la diagonale. Cela signifie que les excentricités de la masse peuvent facilement être prises en compte par le système condensé. La très petite taille du système condensé permet l'utilisation de la matrice de masse complète pour la résolution du système.

Par conséquent, il n'est pas nécessaire de positionner les points de condensation, qui constitueront le modèle condensé, à un endroit particulier tel que le centre de la masse de chaque étage. Comme il peut être nécessaire de calculer la structure plusieurs fois avec des répartitions de masse différentes, la position du centre de la masse de chaque étage peut varier légèrement en fonction de la combinaison de masse sélectionnée. Grâce à l'utilisation d'une matrice de masse complète, les mêmes points de condensation peuvent être employés dans tous les cas.

Au cours de l'analyse, le modèle condensé est calculé automatiquement à partir du maillage complet. Chaque nœud du maillage complet est mappé sur le point de condensation le plus proche.

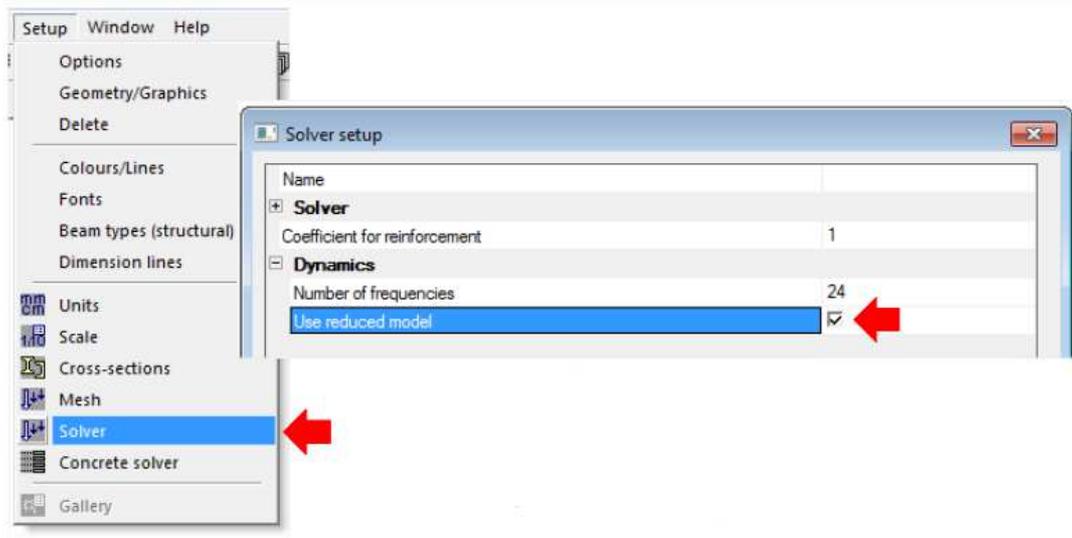
## 6.2 La méthode IRS dans SCIA Engineer

Pour faire un calcul IRS, vous devez d'abord exécuter toutes les étapes comme décrites en détail pour le calcul sismique dans les chapitres précédents. Voici un rappel des étapes à suivre:

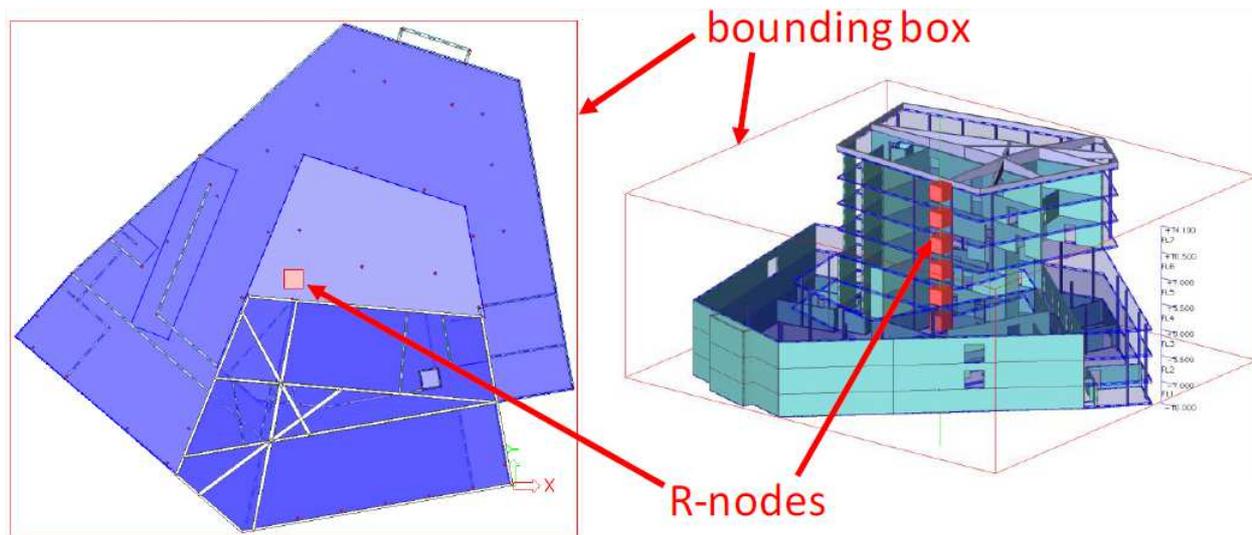


Avant de faire le calcul linéaire, les étapes additionnelles que vous devez exécuter pour pouvoir faire un calcul IRS sont :

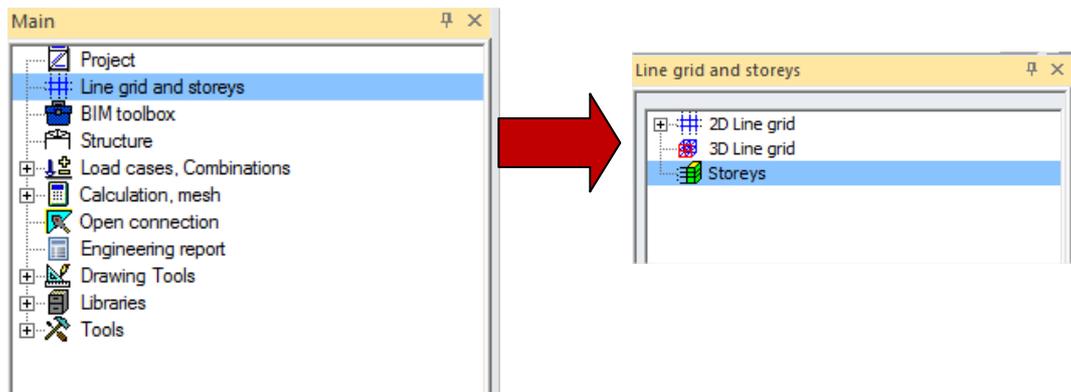
1. Vous devez activer l'option d'analyse avec Modèle condensé dans le projet. Cela peut être fait via le **menu Configuration > Solveur** :



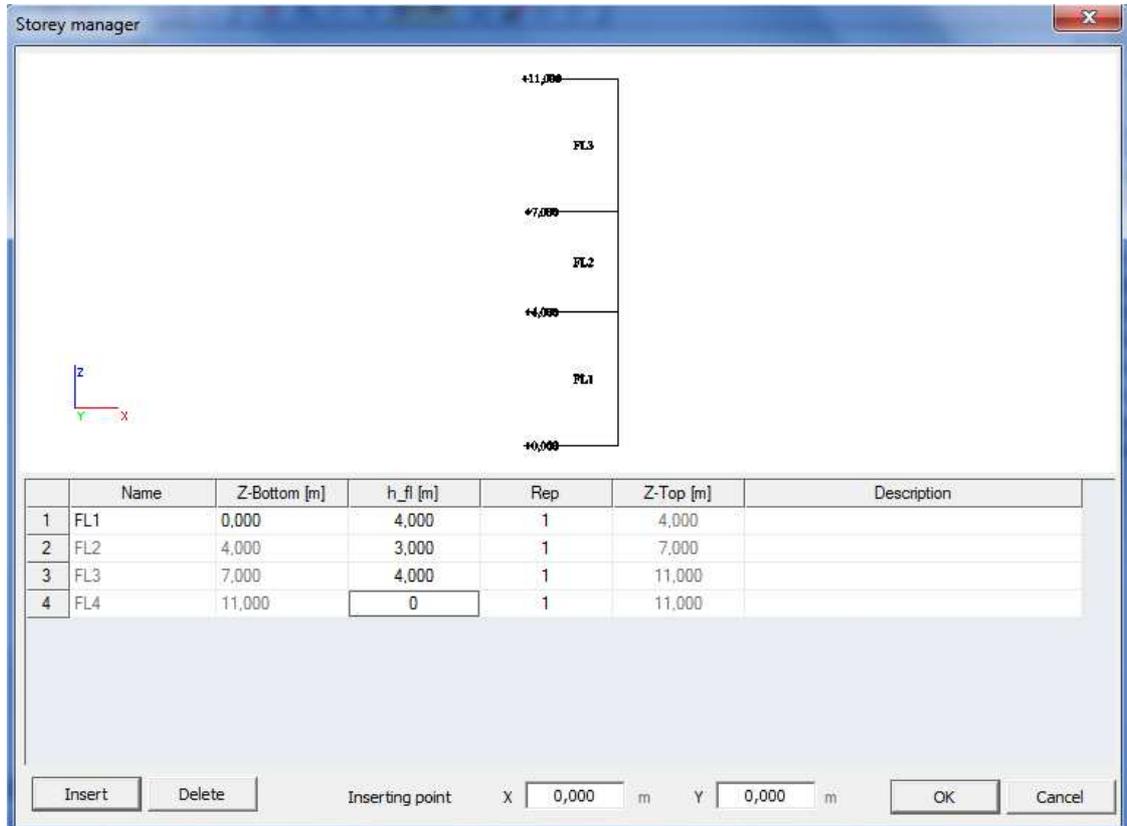
2. Vous devez ensuite définir les étages du bâtiment. Les nœuds de réduction seront calculés à parti des données d'étage. Dans SCIA Engineer 2013, chaque étage est réduit en un seul nœud.



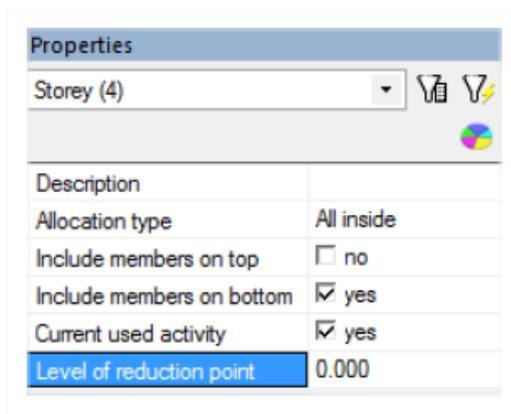
Pour introduire les étages du bâtiment, allez dans le **menu Principal > Grilles et Etages > Etages** :



Le gestionnaire d'étage dans lequel vous pouvez définir les étages s'affiche:



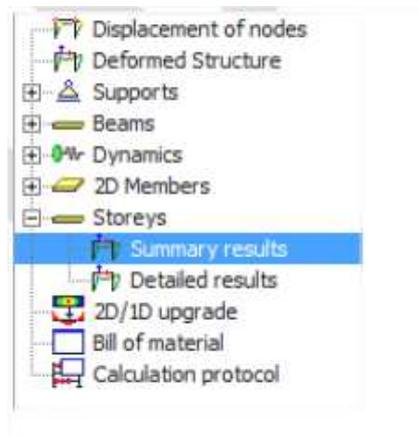
Avec les configurations par défaut, la dalle de chaque étage se situe au bas de l'étage, de même que le point de condensation correspondant. Il est recommandé de laisser les choses en cet état. Cela peut être affiché dans les propriétés d'étage :



3. Une fois que le calcul linéaire a été exécuté, les résultats sont disponibles. Il y a fondamentalement deux types de résultats après une analyse IRS :
  - Les résultats du modèle condensé sont automatiquement extrapolés au maillage complet d'origine et sont accessibles par le biais des sorties de

résultats standards. Ceci n'est pas détaillé ici parce qu'il s'agit de la même chose que ce qui a été expliqué dans les chapitres précédents.

- Certains résultats dédiés provenant directement du modèle condensé sont disponibles dans le nouveau service **Menu Résultats > Etages > Résultats d'ensemble**. On y trouve des informations relatives aux masses, déplacements et accélérations pour chaque étage du modèle condensé.
- D'autres résultats peuvent être affichés via le **Menu Résultats > Etages > Résultats détaillés** : ce menu propose des résultats provenant de l'analyse avec le maillage complet. Pour le moment, il peut être utilisé pour les résultats provenant d'une analyse linéaire, avec ou sans analyse dynamique, avec ou sans analyse IRS. Il fournit des résultats pour tous les éléments porteurs et permet une sélection aisée des éléments par étage. Les murs et les poteaux peuvent être représentés sur le même dessin. Les résultats types produits sont : forces internes, résultantes par mur ou par étage, etc.



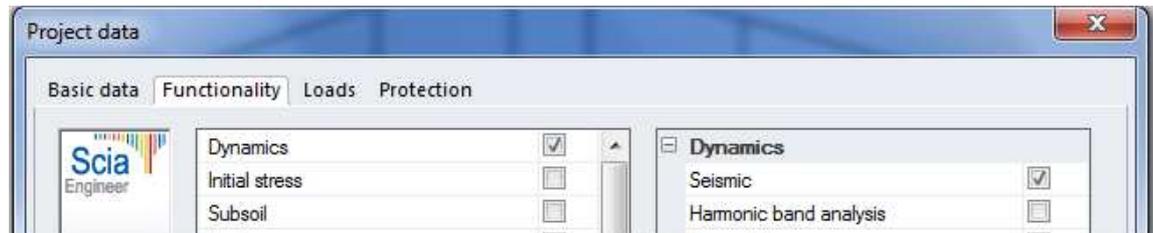
## Exemple 14: IRS.esa

Ouvrez le projet IRS.esa

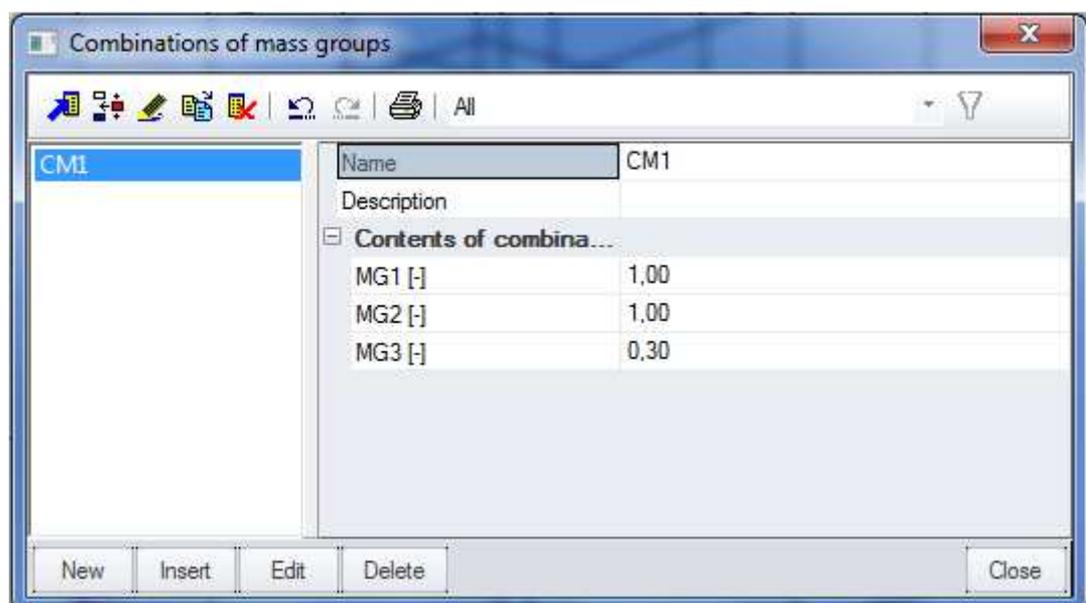
Nous appliquer les principes vus ci-dessus à ce bâtiment.

Etape 1: Exécutez toutes les actions nécessaires pour une analyse sismique :

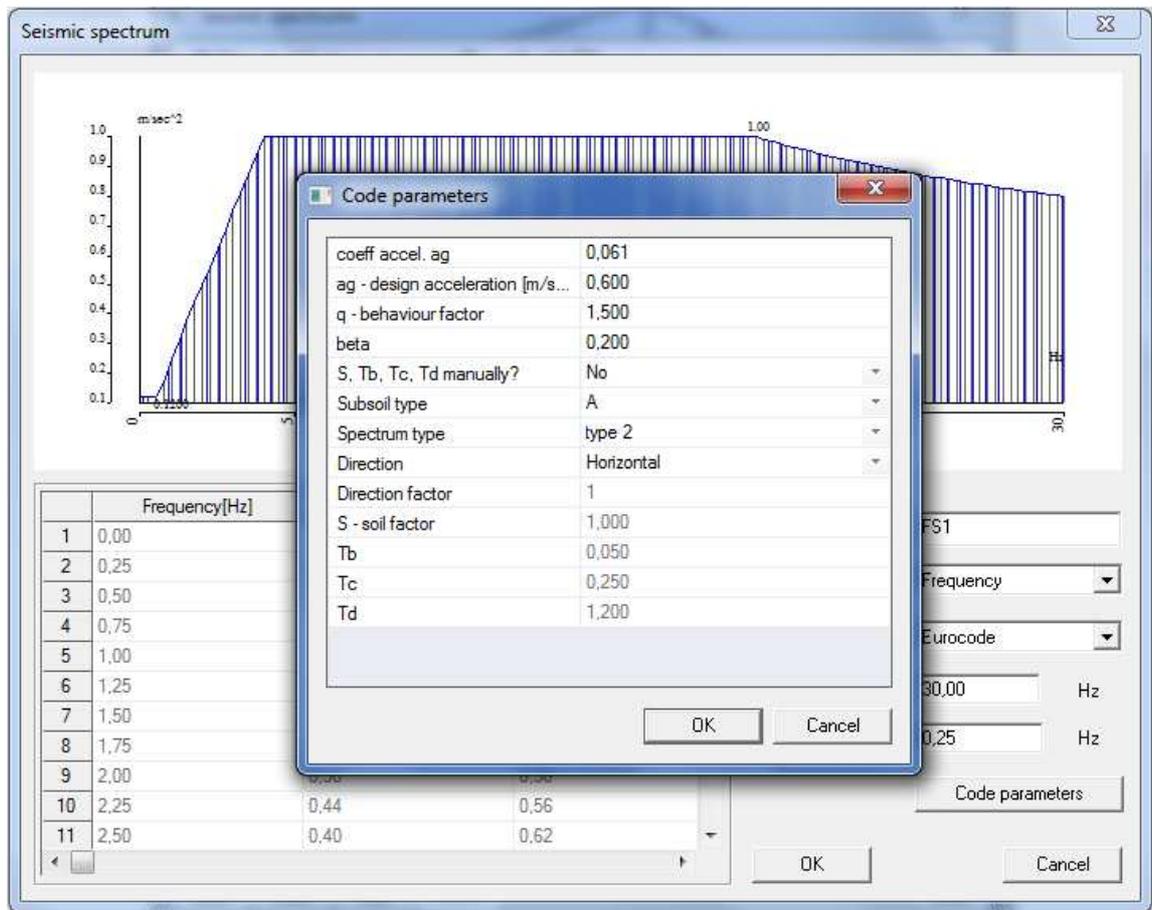
- Activez les **Fonctionnalités Dynamique et Sismique** à partir des données de Projet.



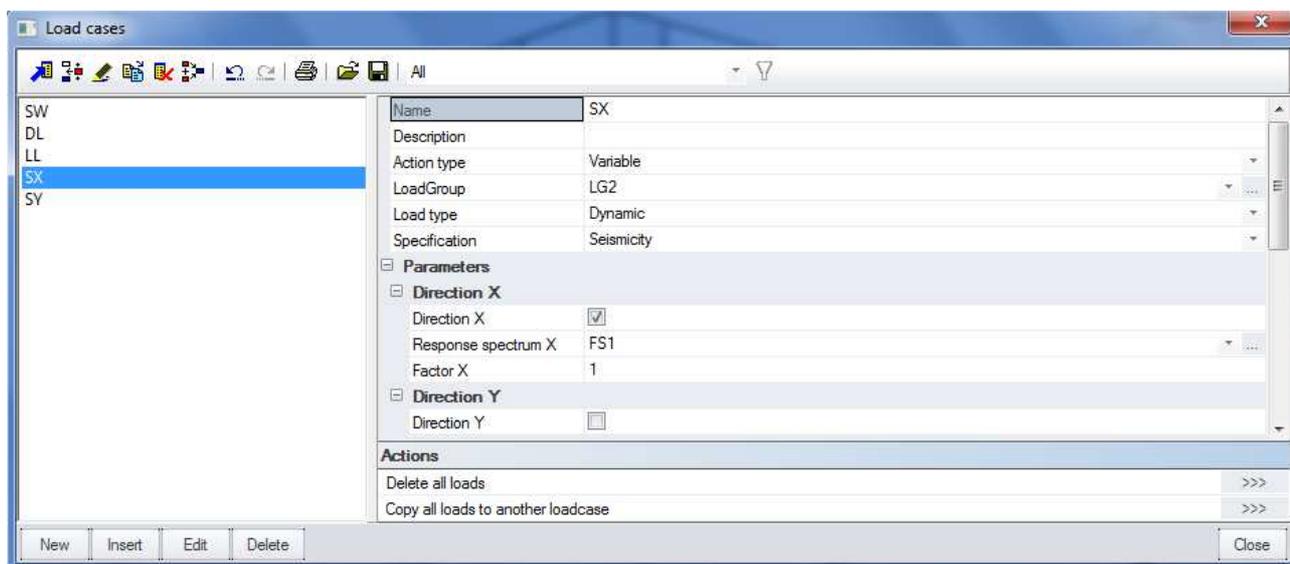
- Créez les **Groupes de masse**. Pour cet exemple nous allons considérer 3 groupes de masse liés à 3 cas de charges statiques prédéfinis : poids propre, Charge Permanente (DL) et Charge d'Exploitation (LL).
- Créez une **combinaison de groupes de masse**

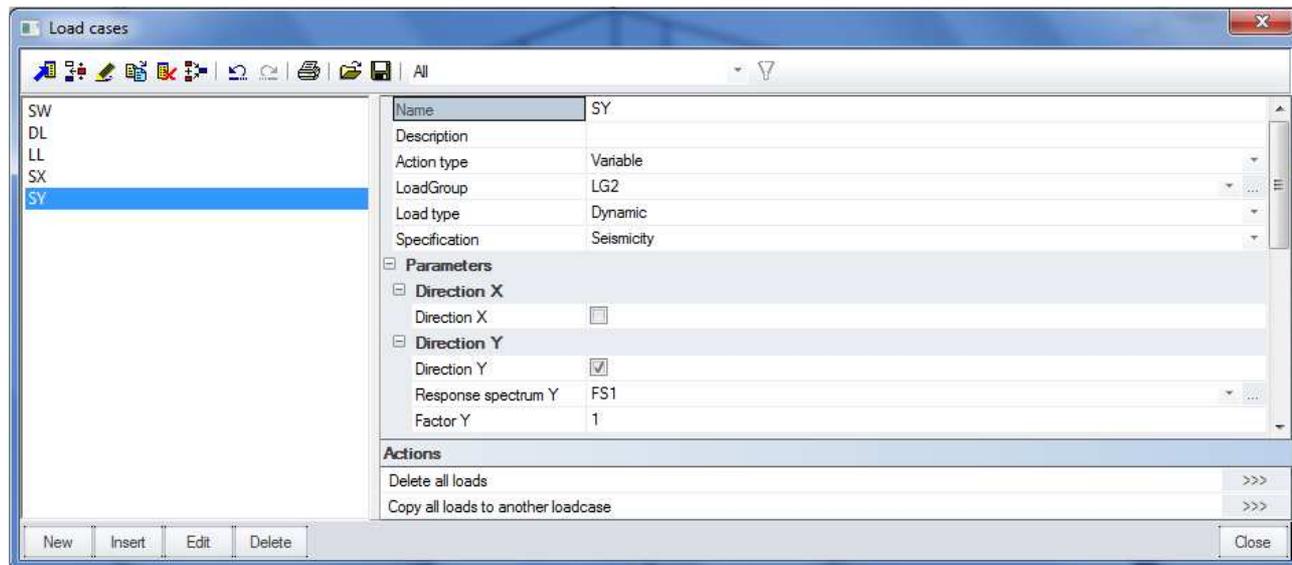


- Définissez un **spectre sismique**. Considérons un spectre sismique avec les paramètres suivants :



- Créez les cas de charges sismique suivant les directions X et Y dans le **menu cas de charge** :



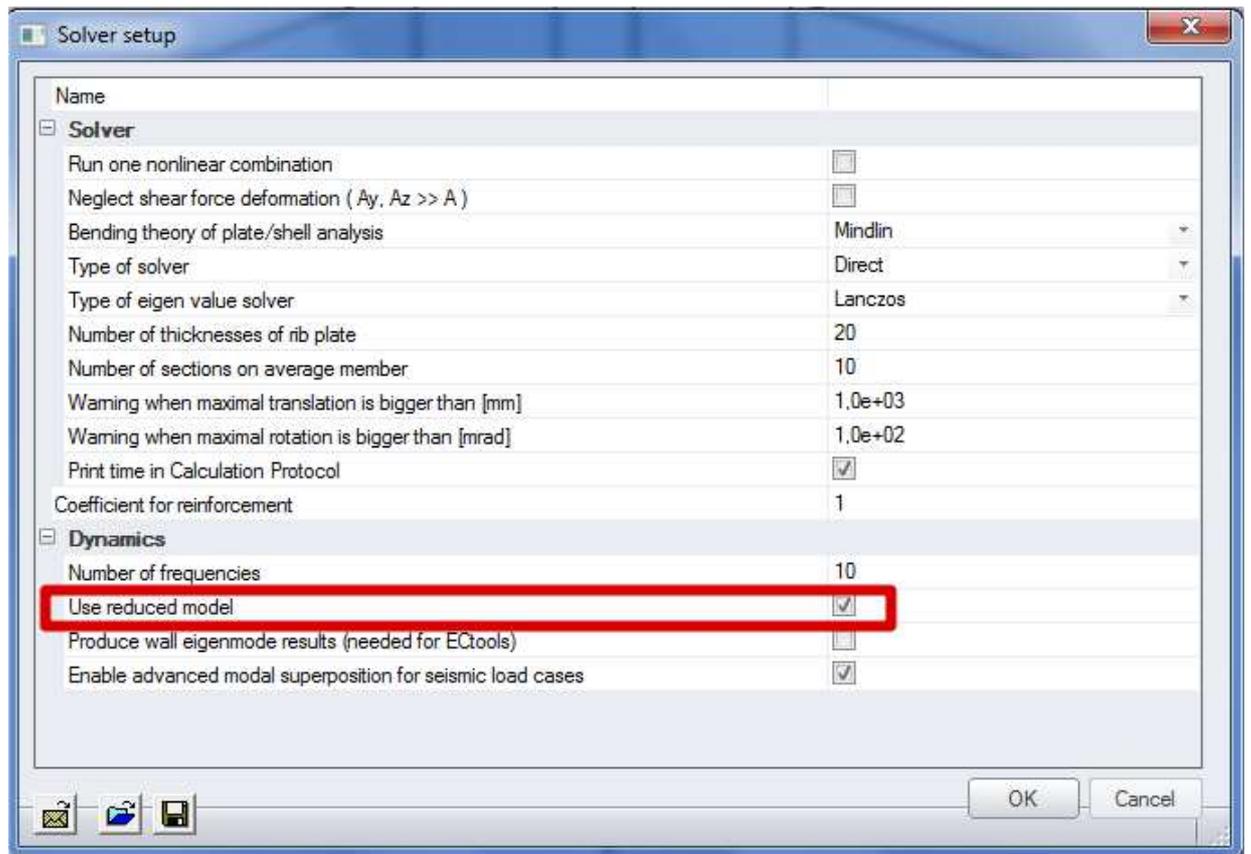


- Raffinez le maillage. Pour cet exemple, nous choisissons un maillage comme suit :

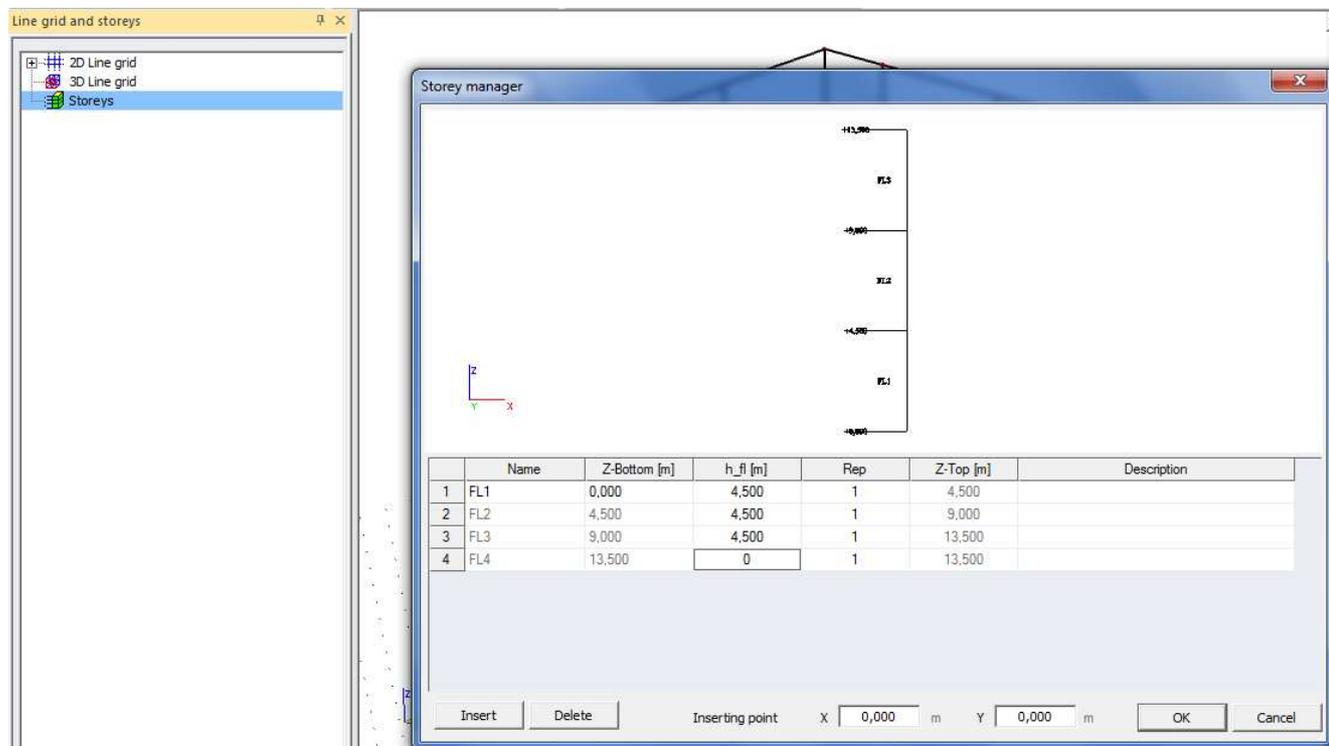


- Choisissez le nombre de fréquences propres qui doit être calculé (**Configuration > Solveur**). Nous choisissons **10 valeurs**.

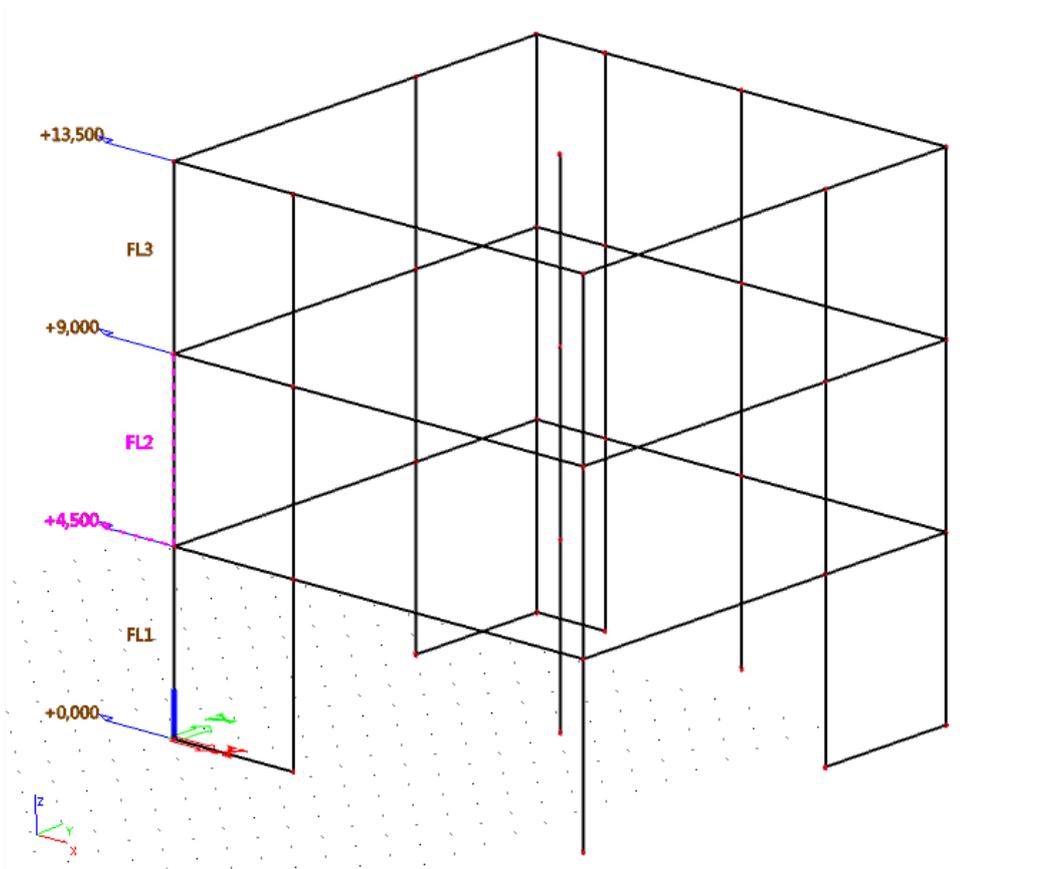
Etape 2: Activez l'option 'Utiliser le modèle condensé' à partir de la **Configuration du Solveur**.



**Etape 3:** Définissez les Etages à partir dans **Menu Principal > Grilles et Etages**



Les niveaux sont affichés graphiquement. Si vous sélectionnez un niveau d'étage, vous pouvez modifier les propriétés dans la fenêtre des Propriétés :



Properties	
Storey (1)	
Name	FL2
Description	
Z-Bottom [m]	4,500
h_fl [m]	4,500
Filtered allocation of Entities	...
Allocation type	All inside
Include members on top	<input type="checkbox"/> no
Include members on bottom	<input checked="" type="checkbox"/> yes
Current used activity	<input checked="" type="checkbox"/> yes
Level of reduction point	0,000

Vous pouvez vérifier si les éléments porteurs du bâtiment sont correctement attribués aux étages en utilisant la propriété 'Attribution filtrée des Entités'.

Optionnellement, des nœuds de réduction peuvent être placés à n'importe quel niveau de chaque étage. La propriété d'étage "niveau du point de condensation " permet de sélectionner la hauteur exacte du point de condensation pour chaque étage séparément. 0 correspond au bas de l'étage, 1 au haut de l'étage.

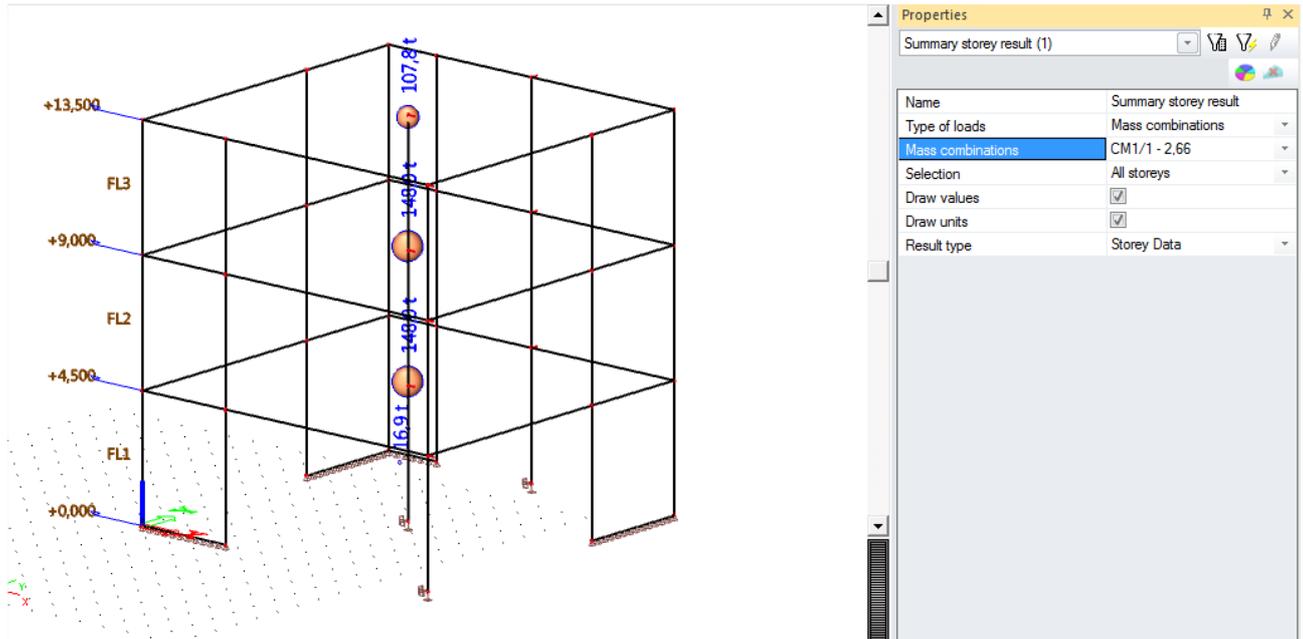
Etape 4: Exécutez un calcul linéaire

**Résultats d'ensemble par étage :**

Il y a 3 types de résultats : Données d'étage, déplacements et accélérations.

- Données d'étage :

Les données d'étage permettent d'afficher pour chaque étage la valeur totale de la masse et les coordonnées du centre de masse. Ceci est seulement disponible avec les combinaisons de masse



Preview

Summary storey result

Storey Data:  
 Eigen solution, Extreme: No, System: Principal  
 Selection: All  
 Mass combinations : CM1/1 - 2,66  
 Modal shapes are dimensionless, units are printed for consistency purposes.

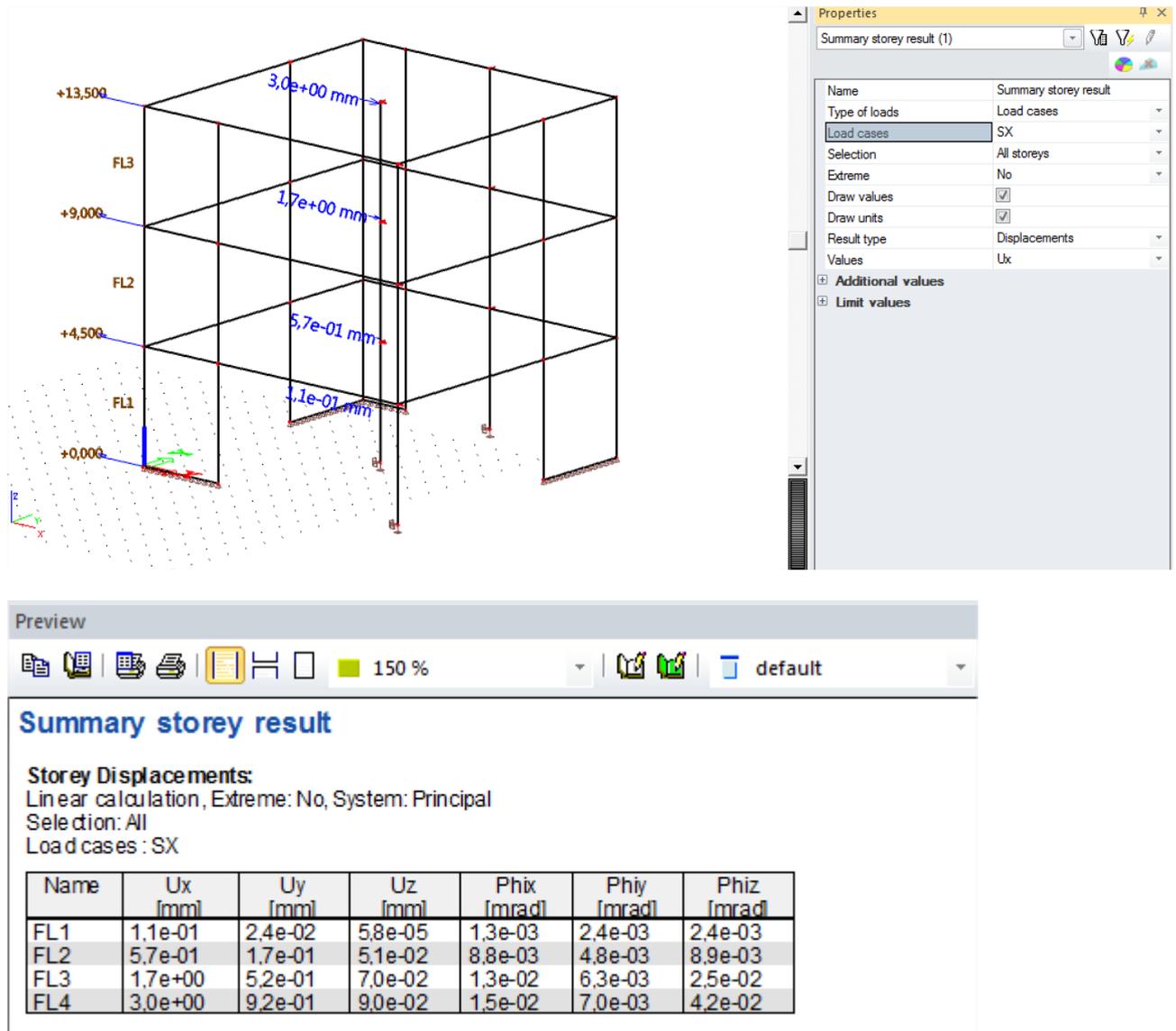
Name	M [t]	XG [m]	YG [m]	ZG [m]
FL1	16,9	4,157	7,704	1,250
FL2	148,0	5,663	6,350	4,500
FL3	148,0	5,663	6,350	9,000
FL4	107,8	5,769	6,240	13,343

- Déplacements & accélérations :

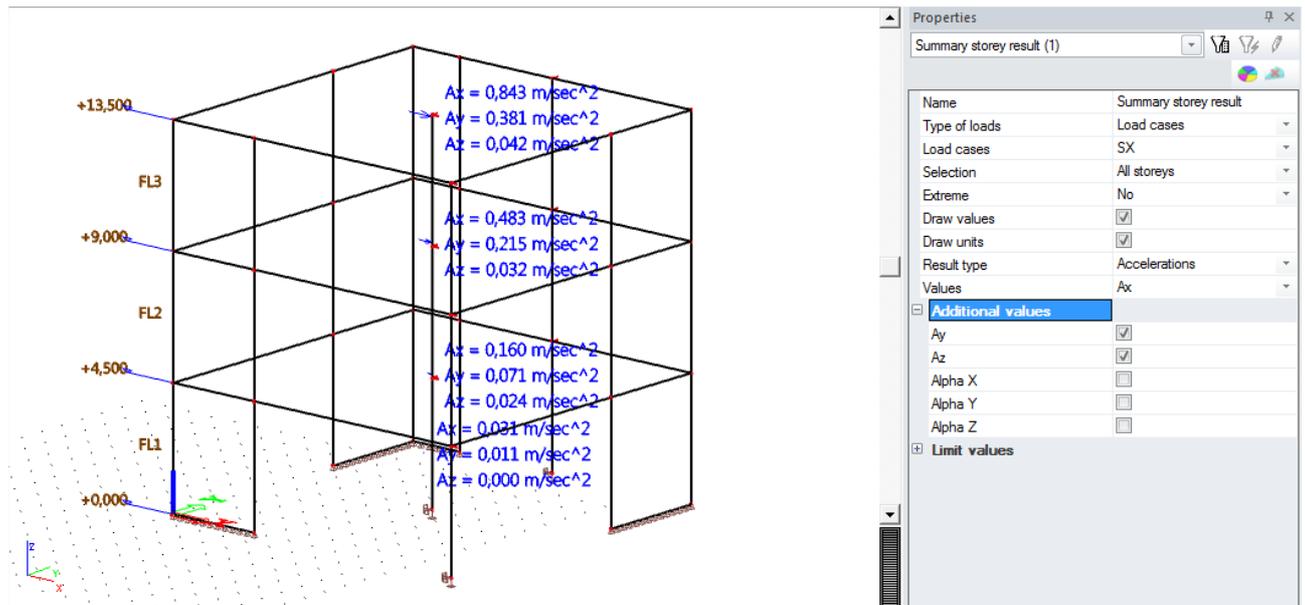
Les déplacements & accélérations sont disponibles pour les modes propres et les cas de charge sismiques. Les valeurs de composantes de déplacement & accélération sont données au centre de masse de chaque étage.

Les résultats pour les combinaisons de masse sont des résultats purs, normalisés à partir de l'analyse modale, sans l'effet du spectre de réponse.

Les résultats pour les cas de charge sismique sont les valeurs après superposition modale.



En utilisant l'option 'Valeurs additionnelles' dans la fenêtre de propriétés, vous pouvez afficher plus de composants :



### Résultats détaillés par étage :

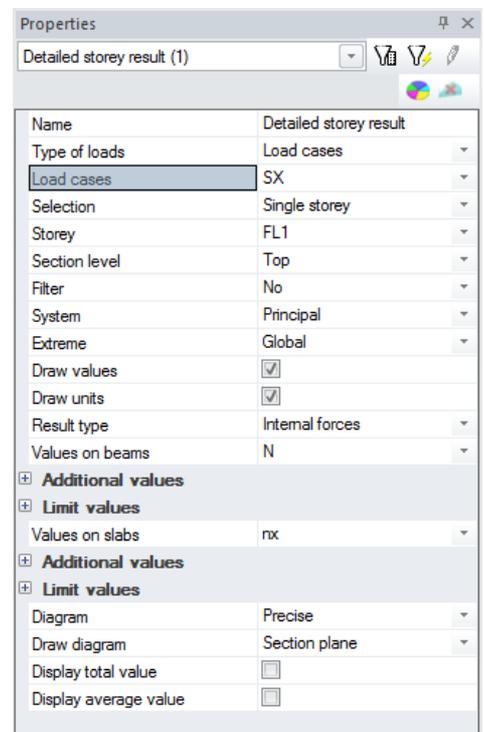
Les résultats qui sont fournis typiquement sont : les efforts internes, les résultantes par voile ou par étage...

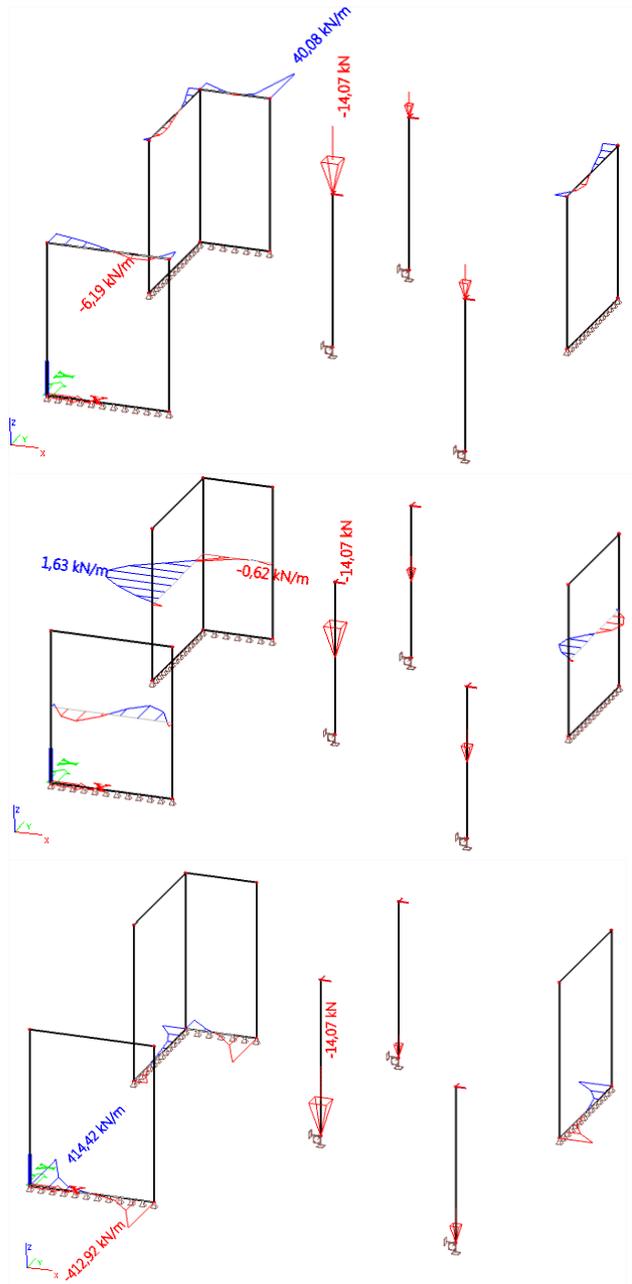
2 types de résultats sont principalement disponibles dans le service :

- **Efforts internes dans les éléments porteurs**

Le résultat peut être affiché sur différents niveaux de coupe :

- Haut (coupe en haut de chaque étage)
- Milieu (coupe au milieu de chaque étage)
- Bas (coupe en bas de chaque étage)
- Personnalisé





## Detailed storey result

Linear calculation, Extreme: Global, System: Principal

Selection: FL1

Load cases: SX

Columns:

Name	Storey	x [m]	y [m]	z [m]	N [kN]	Vy [kN]	Vz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
B40	FL1	6,000	12,000	0,000	-5,32	0,17	1,11	0,04	-2,97	-0,62
B37	FL1	12,000	0,000	0,000	-7,10	0,28	0,60	0,04	-2,04	-0,89
B22	FL1	6,000	6,000	0,000	-14,07	0,28	1,12	0,03	-2,90	-0,77

Walls:

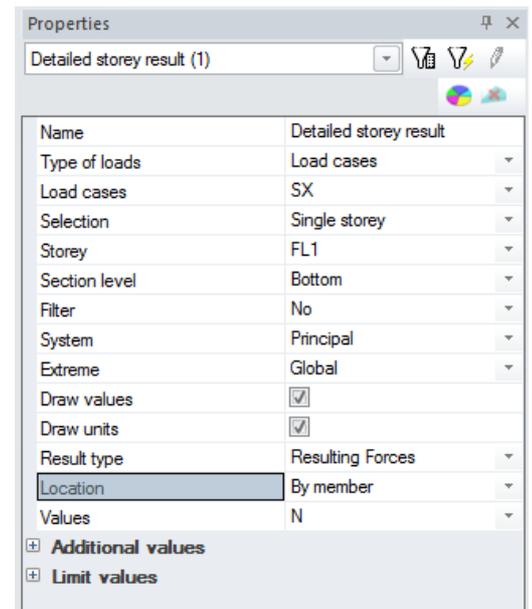
Name	Storey	x [m]	y [m]	z [m]	nx [kN/m]	ny [kN/m]	ny [kN/m]	mx [kNm/m]	my [kNm/m]	my [kNm/m]	wx [kN/m]	wy [kN/m]
S15	FL1	3,500	0,000	0,000	-412,92	-656,81	-130,99	0,03	0,04	-0,02	0,21	0,26
S15	FL1	0,000	0,000	0,000	414,42	659,18	-131,51	-0,03	-0,03	-0,01	0,13	-0,13
S10	FL1	1,500	12,000	0,000	-151,68	-291,51	74,15	-0,02	0,01	0,05	-0,36	0,45
S7	FL1	0,000	12,000	0,000	135,23	297,29	-20,21	2,32	5,34	-2,17	14,69	-23,77
S10	FL1	0,000	12,000	0,000	139,96	294,00	-73,39	-3,00	-9,50	1,85	14,59	-57,50
S7	FL1	0,000	11,000	0,000	29,74	145,80	10,44	-0,05	-0,15	-0,44	-3,89	0,31
S10	FL1	0,500	12,000	0,000	38,76	58,18	18,97	-0,03	0,38	0,07	4,23	18,73

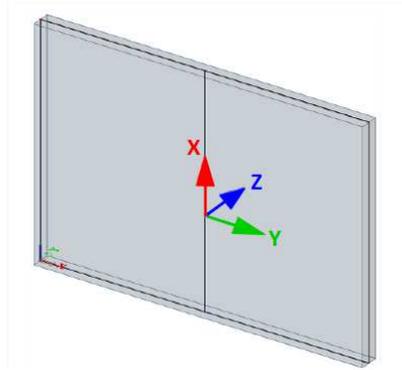
- Forces résultantes (par élément)

Position = par élément : calcule les forces résultantes pour chaque élément de voile séparément

Les efforts résultants des éléments 1D (poteaux) sont identiques aux efforts internes de ces mêmes éléments.

Les efforts résultants des éléments 2D (murs) calculent la résultante au centre de chaque mur, se conformant à un système de coordonnées locales dédié, quel que soit le paramétrage de sortie du système. Le système de coordonnées utilisé est identique au SCL d'une nervure verticale placée au milieu du mur. C'est également le même système de coordonnées que celui employé pour les bandes d'intégration.



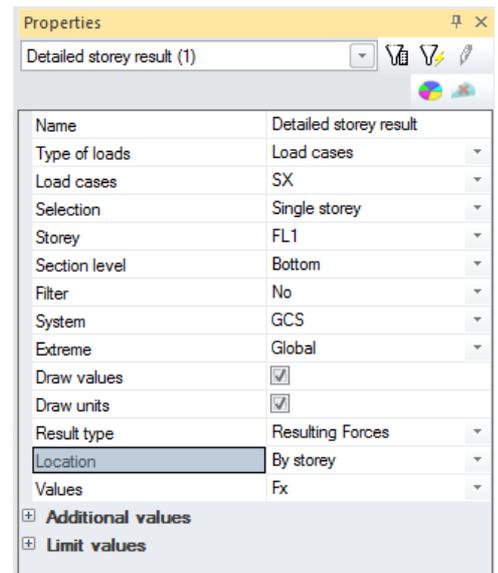


- L'axe local X est vertical, vers le haut
- L'axe Z local est identique à l'axe Z du SCL du mur
- $Y = Z \wedge X$

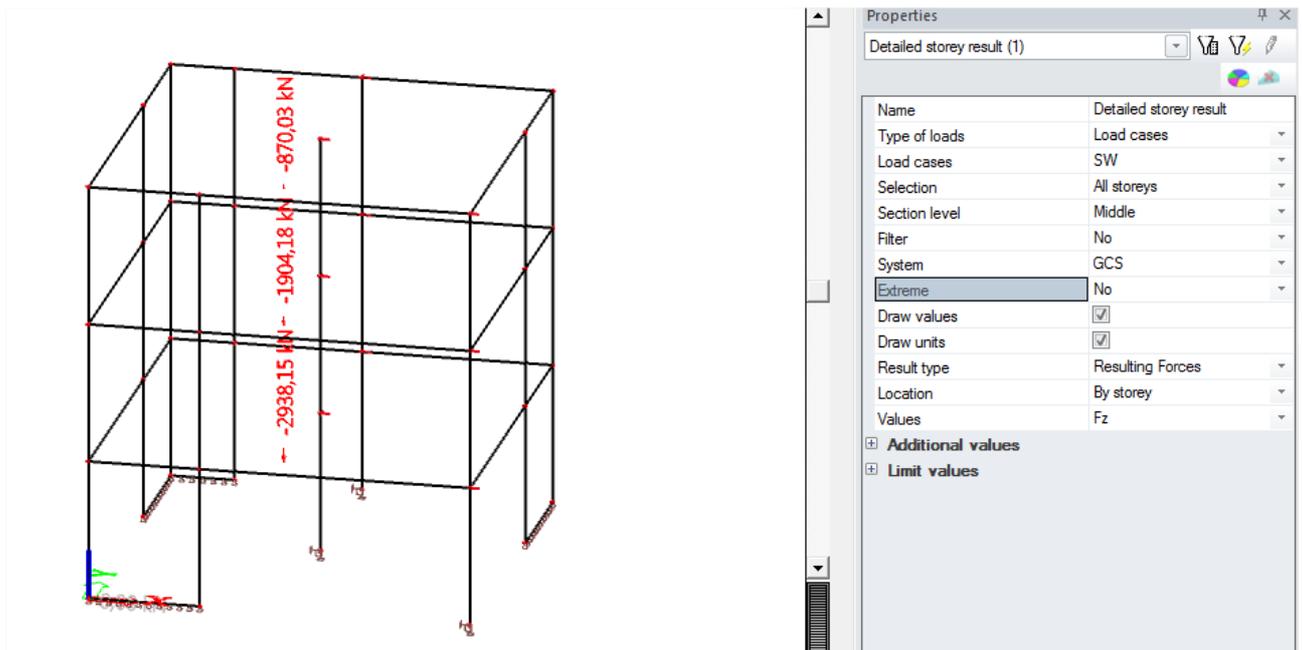
De cette manière, les forces résultantes des murs peuvent aisément être affichées ensemble, en cohérence avec les efforts internes des poteaux et sur un dessin unique.

- **Forces résultantes (par étage)**

Position = par étage : les forces résultantes sont calculées pour chaque étage en considérant tous les éléments porteurs en même temps; 1D (poteaux) et éléments 2D (murs) sont pris en compte **ensemble**



## Forces totales verticales à tous les étages



### Detailed storey result

Linear calculation, Extreme: No, System: GCS

Selection: All

Load cases : SW

#### Resulting Forces

Name	x [m]	y [m]	z [m]	Fx [kN]	Fy [kN]	Fz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
FL1	4,507	7,549	2,250	-0,44	-1,04	-2938,15	3281,45	-3163,36	5,73
FL2	4,507	7,549	6,750	0,86	-0,87	-1904,18	2187,60	-2109,18	-0,09
FL3	4,507	7,549	11,250	1,09	-1,01	-870,03	1093,35	-1054,50	-0,82
FL4	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

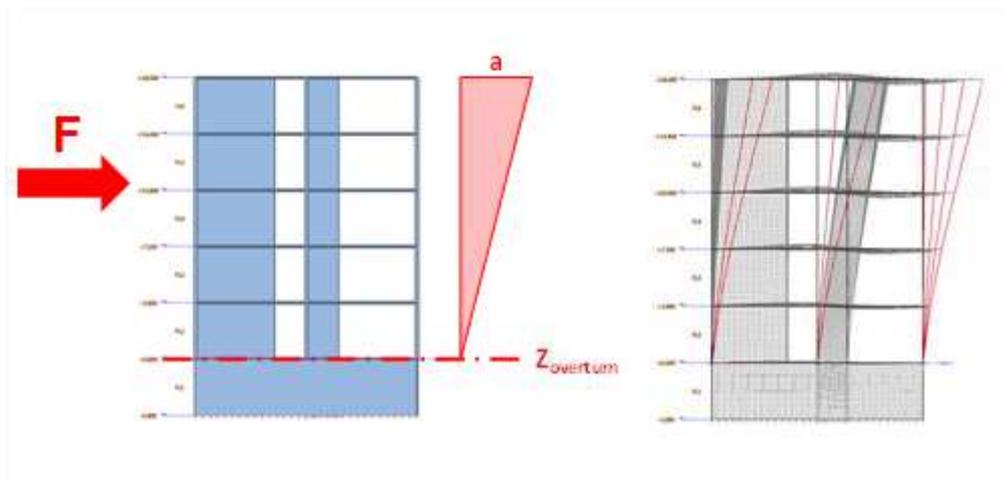
## 6.3 Excentricité accidentelle (Torsion accidentelle)

L'excentricité accidentelle prend en compte les imprécisions dans la distribution des masses dans la structure. Les normes de Conception la prennent en compte généralement en tant qu'excentricité additionnelle qui est définie comme une fraction de la taille de la structure.

Dans l'Eurocode 8, l'excentricité accidentelle pour un étage donné est définie comme 5% de la largeur de l'étage perpendiculairement à la direction de l'action sismique.

Dans SCIA Engineer, l'utilisation du modèle condensé IRS permet d'introduire facilement une excentricité accidentelle, puisque le modèle condensé utilise seulement un nœud de réduction par étage. L'excentricité accidentelle peut être prise en compte soit comme une excentricité réelle de masse ou comme une action de torsion additionnelle (méthode simplifiée selon les normes de conception).

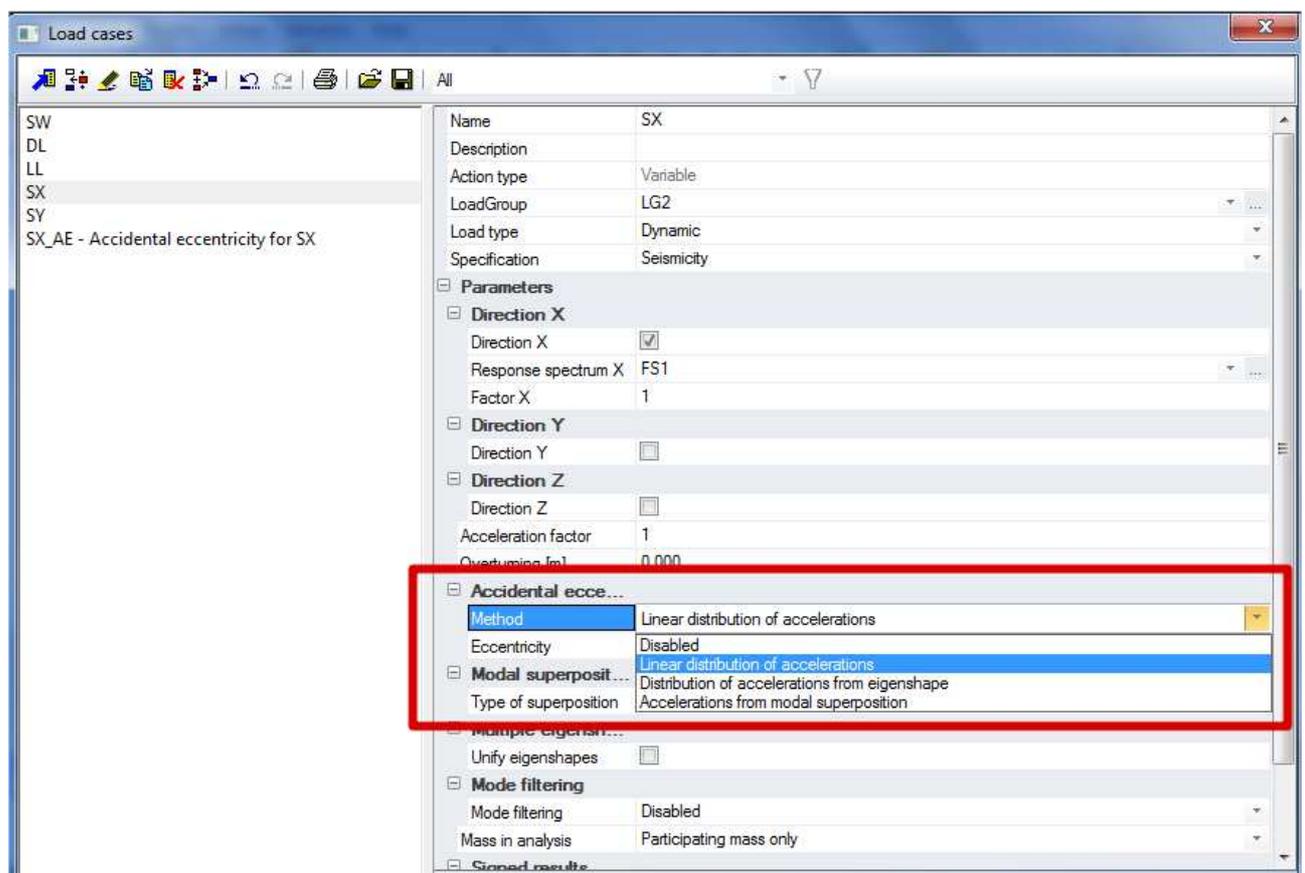
SCIA Engineer utilise la méthode simplifiée en introduisant un moment de torsion additionnel. L'excentricité accidentelle est ajoutée à travers un chargement statique (EN 1998-1 4.3.3.3.3)



### Exemple 15: Accidental\_torsion.esa

Dans SCIA Engineer, la torsion accidentelle peut être prise en compte dans un projet sismique en utilisant la **méthode IRS**.

Ouvrez le **menu Cas de charges** et sélectionnez un type d'Excentricité accidentelle :



Les méthodes suivantes sont disponibles pour le calcul des moments de torsion :

- Distribution linéaire de l'accélération (EN 1998-1 4.3.3.3.3 et formule (4.11) )
- Distribution de l'accélération selon un mode propre (EN 1998-1 4.3.3.3.3 et formule (4.10) )
- Accélérations données par la superposition modale

Une fois que l'excentricité accidentelle est sélectionnée, un nouveau cas de charge AE et aussi un nouveau groupe de charge sont créés automatiquement :

